

راهنمای آموزشی صنف دوازدهم دوره چهارم.

- یاد بگیری که چگونه مربع یک تابع را مشتق بگیری.
- بتوانی تابع‌های مرکب را تشخیص بدهی و با قاعده زنجیره‌ای از آن‌ها مشتق بگیری
- مشتق توابع مثلثاتی را حفظ کنی و از آن‌ها در حل مسائل استفاده کنی
- یاد بگیری که چگونه از معادلاتی که y صراحتاً داده نشده مشتق بگیری (مشتق ضمنی)،

قضیه 1. مشتق تابع جذری درجه دوم مساوی است به مشتق تابع مجذور بر دو چند همان تابع جذری در مخرج یعنی

$$y = \sqrt{u} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

ثبوت.

$$y + \Delta y = \sqrt{u + \Delta u}$$

$$\Delta y = \sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u} = \frac{u + \Delta u - u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} \right)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

میدانیم که $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u = 0$ است، بنا بر این $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ میباشد، فلذا

$$y' = u' \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

مثال 1. مشتق تابع $f(x) = \sqrt{6x^2 - 7x}$ در $x = 3$ محاسبه کنید.

حل-

$$f'(x) = \frac{(6x^2 - 7x)'}{2\sqrt{6x^2 - 7x}} = \frac{12x - 7}{2\sqrt{6x^2 - 7x}} \Rightarrow f'(3) = \frac{29}{2\sqrt{54 - 21}} = \frac{29}{2\sqrt{33}}$$

مشتق تابع مرکب یا قاعده زنجیره ای

هیچیک از قواعد مشتقگیری که تاکنون ثابت شده اند طرزمشتقگیری از توابع مرکب نظیر $\sqrt[3]{x^2 + 1}$ و یا $\sin(\sin x)$ را به ما نمی گوید ، لذا اینک به اثبات قاعده دیگری می پردازیم که مشتق تابع مرکب را برحسب مشتقات توابع مؤلفه آن بیان می کند ، قاعده زنجیره ای موسوم است ، به قدرکافی

ساده ولی اثبات آن کمی پیچیده می باشد . فرض کنیم f و g دوتابع باشند ، بطوریکه f در x و g در $f(x)$ ، یعنی مقدار f در x ، مشتقپذیرباشد . بزودی نشان می دهیم که تابع مرکب $g(f(x))$ نیزدر x مشتق پذیربوده و دارای مشتق

$$\frac{d}{dx} g(f(x)) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \quad (I)$$

می باشد که درآن پریم مشتق نسبت به شناسه تابع رانشان می دهد ، مثلاً هرگاه $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = \sqrt[3]{x}$ ، آنگاه $g(f(x)) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$. به علاوه ، f برای هر x مشتق پذیراست حال آنکه g برای هر $x > 0$ و درنتیجه برای هرقیمت از f زیرا $x^2 + 1 \geq 1$ مشتق پذیرمیباشد ، دراین حالت $g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ و $f'(x) = 2x$ ، درنتیجه قاعده زنجیره ای (I) شکل زیررا بخود میگیرد.

$$\frac{d}{dx} \left(\sqrt[3]{x^2 + 1} \right) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}} \cdot 2x = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}$$

قضیه 2 (قاعده زنجیره ای) فرض کنیم f در x و g در $f(x)$ مشتق پذیرباشد ، دراین صورت تابع مرکب $g \circ f$ در x مشتق پذیراست و مشتقش از رابطه ذیل بدست می آید .

$$\frac{d}{dx} (g \circ f)(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \quad (I')$$

ثبوت (اختیاری) . چون g در $f(x)$ مشتق پذیراست ، داریم

زیرا برقراری $\Delta y \neq 0$ را نمی توان تضمین کرد (به یاد آورید که Δy دلخواه نیست بلکه با مقدار Δx معین می شود) از روابط (IV) تا (VI) نتیجه می شود که

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta x} = g'(y) \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

یا معادلاً

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(f(x + \Delta x)) - g(f(x))}{\Delta x} = g'(f(x)) \cdot f'(x) \quad (VII)$$

زیرا $y = f(x)$ و $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ حال ثبوت قاعده زنجیره ای (I) یا (II) کامل است، زیرا لیمت (VII) چیزی جز مشتق تابع مرکب $g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ نیست. [1]

اگر $f(x)$ به u و $g(f(x))$ را y فرض کنیم پس مشتق تابع مرکب را می نویسیم

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \Rightarrow y'_x = y'_u \cdot u'_x \cdot v'_x$$

در صورتیکه تابع مرکب از سه تابع تشکیل شده باشد، پس مشتق آن مساوی است به

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \cdot v'_x \quad \vee \quad (g(f(h(x))))' = g'(f(h(x))) \cdot f'(h(x)) \cdot h'(x)$$

مثال 1. مشتق تابع $y = \sqrt{x^5 - 6x + 7}$ را دریابید.

حل- در اینجا $u = x^5 - 6x + 7$ و $y = \sqrt{u}$ است، پس و $u'_x = 5x^4 - 6$ پس می نویسیم که

$$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{(5x^4 - 6)}{2\sqrt{x^5 - 6x + 7}}$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y} = g'(y) \quad \vee \quad \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y} = g'(y) + \varepsilon(\Delta y) \quad (II)$$

که در آن $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta y) = 0$. بنابه (وقتی که $x \rightarrow a$ ، $f(x) \rightarrow L$ اگر فقط اگر $f(x) = L + e(x)$ ، که در آن وقتی $e(x) \rightarrow 0$ ، $x \rightarrow a$) با ضرب رابطه (II) در Δy درمیابیم

$$g(y + \Delta y) - g(y) = [g'(y) + \varepsilon(\Delta y)]\Delta y \quad (III)$$

مهم است توجه کنیم که اگرچه (III) با فرض $\Delta y \neq 0$ نوشته شده است ، فرمول (III) حاصل از (II)

برای $\Delta y \neq 0$ ، حتی در صورت $\Delta y = 0$ نیز درست است ، زیرا افزایش $g(y + \Delta y) - g(y)$

صرف نظرازانتهاب $\varepsilon(0)$ ، برای $\Delta y = 0$ صفر است . تا ب حال $\varepsilon(\Delta y)$ فقط برای $\Delta y \neq 0$ تعریف شده است، ولی اکنون قلمرو $\varepsilon(\Delta y)$ را با فرض $\varepsilon(0) = 0$ وسیع ساخته $\varepsilon(\Delta y)$ را در $\Delta y = 0$ پیوسته می سازیم. حال (III) را به Δx یعنی نمو متحول مستقل ، تقسیم کرده و لیمت آن را وقتی $\Delta x \rightarrow 0$ می گیریم. این کار نتیجه می دهد که

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [g'(y) + \varepsilon(\Delta y)] \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (IV)$$

که در آن

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \quad (V)$$

تزايد متحول مستقل y است. به علاوه، چون f در x مشتق پذیر است و لذا در x پیوسته است $\Delta x \rightarrow 0$ ایجاب می کند که $\Delta y \rightarrow 0$. در نتیجه

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta y) = 0 \quad (VI)$$

این امر که $\varepsilon(0) = 0$ و در نتیجه $\varepsilon(\Delta y) = 0$ در $\Delta y = 0$ پیوسته است در این نتیجه گیری اهمیت دارد

$$f'(x) = \frac{5 \cdot (\sqrt{2x+5})'}{(\sqrt{2x+5})^2} = \frac{5}{\sqrt{2x+5}} \cdot \frac{1}{2x+5} = \frac{5}{(2x+5)\sqrt{2x+5}} \Rightarrow f'(2) = \frac{5}{27}$$

مشتقات توابع مثلثاتی

1. مشتق تابع $y = \sin x$ مساوی به $y' = \cos x$ است.

ثبوت. با در نظر داشت تحلیل الجبری مشتق داریم

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x) \Rightarrow \Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

حالا با استفاده از فرمول $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}$ داریم که

$$\Delta y = 2 \sin \left(\frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} \right) \cdot \cos \left(\frac{x + \Delta x + x}{2} \right) = \frac{\sin \frac{\Delta x}{x} \cdot \cos \left(1 + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(1 + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

نظربه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ داریم که $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$ پس :

$$y' = 1 \cdot \cos \left(1 + \frac{0}{2} \right) = \cos x$$

2- مشتق تابع $y = \cos x$ مساوی است به $y' = -\sin x$.

ثبوت. طبق معمول به ثبوت می رسانیم

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2 \sin \frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin \frac{x + \Delta x - x}{2}}{\Delta x}$$

مثال 2. مشتق تابع $y = (x^2 - 4x)^5$ را در $x = 2$ دریابید.

$$y' = 5(x^2 - 4x)^4 \cdot (2x - 4) \Rightarrow y'(2) = 5 \cdot (0) \cdot (4 - 8) = 0$$

قضیه 7. مشتق تابع $y = \sqrt[n]{u^n}$ مساوی است به :

$$y' = \frac{nu'}{m\sqrt[n]{u^{m-n}}}$$

ثبوت. ابتدا تابع مذکور را به شکل تابع طاقت دارنوشته و نظر به قاعده زنجیره ای مشتق می گیریم، یعنی

$$y = u^{\frac{n}{m}} \Rightarrow y' = \frac{n}{m} u^{\frac{n}{m}-1} \cdot u' = \frac{u'n}{m\sqrt[n]{u^{m-n}}}$$

مثال 1. مشتق تابع $f(x) = \sqrt[5]{(x^2 - 4)^2}$ را در $x = 3$ دریابید.

حل- قرار قاعده فوق داریم

$$y' = \frac{2 \cdot (x^2 - 4)'}{5\sqrt[5]{(x^2 - 4)^{5-2}}} = \frac{2 \cdot 2x}{5\sqrt[5]{(x^2 - 4)^3}} \Rightarrow f'(3) = \frac{12}{5\sqrt[5]{125}}$$

مثال 2. مشتق تابع $y = \sqrt[6]{10x^2 - 8}$ را دریابید.

حل-

$$y' = \frac{(10x^2 - 8)'}{6\sqrt[6]{(10x^2 - 8)^{6-1}}} = \frac{20x}{6\sqrt[6]{(10x^2 - 8)^5}} = \frac{10x}{3\sqrt[6]{(10x^2 - 8)^5}}$$

مثال 3. مشتق تابع $f(x) = \frac{-5}{\sqrt{2x+5}}$ را در $x = 2$ محاسبه کنید.

حل-

1. $y = \sin u \Rightarrow y' = \cos u \cdot u'$
2. $y = \sin^n u \Rightarrow y' = n \sin^{n-1} u \cdot \cos u \cdot u'$
3. $y = \cos u \Rightarrow y' = -\sin u \cdot u'$
4. $y = \cos^n u \Rightarrow y' = -n \cos^{n-1} u \cdot \sin u \cdot u'$
5. $y = \tan u \Rightarrow y' = \sec^2 u \cdot u'$
6. $y = \tan^n u \Rightarrow y' = n \tan^{n-1} u \cdot \sec^2 u \cdot u'$
7. $y = \cot u \Rightarrow y' = -\csc^2 u \cdot u'$
8. $y = \cot^n u \Rightarrow y' = n \cot^{n-1} u \cdot \csc^2 u \cdot u'$
9. $y = \sec u \Rightarrow y' = \sec u \cdot \tan u \cdot u'$
10. $y = \sec^n u \Rightarrow y' = n \sec^{n-1} u \cdot \tan u \cdot u'$
11. $y = \csc u \Rightarrow y' = -\csc u \cdot \cot u \cdot u'$
12. $y = \csc^n u \Rightarrow y' = -n \csc^{n-1} u \cdot \csc u \cdot \cot u \cdot u'$

3- مشتق تابع $y = \tan x$ مساوی است به :

$$y' = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

ثبوت.

$$y = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

4- مشتق تابع $y = \cot x$ مساوی است به:

$$y' = -\csc^2 x = -(1 + \cot^2 x)$$

ثبوت.

$$y = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{(-\sin x) \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

5- مشتق تابع $y = \sec x$ مساوی است به :

$$y' = \sec x \cdot \tan x = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

ثبوت.

$$y = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow y' = \frac{(-1) \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

6- مشتق تابع $y = \csc x$ مساوی است به :

$$y' = \csc x \cdot \cot x = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$$

ثبوت.

$$y = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{(-1) \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

با استفاده از قاعده زنجیره ای مشتقات توابع مرکب مثلثاتی را قرار ذیل داریم. [2]