

راهنمایی آموزشی صنف یازدهم دوره چهارم.

اهداف آموزشی

در پایان این درس، دانش آموز باید بتواند:

1. معادلات پایه‌ای مثلثاتی را حل کند.
2. معادلات مثلثاتی درجه دوم را با استفاده از تغییر متغیر حل نماید.
3. راه حل‌های کلی (عمومی) در بازه‌های مشخص یا کل محور حقیقی را ارائه کند.
4. سیستم‌های دو معادله‌ای با دو مجهول مثلثاتی را تحلیل و حل کند.
5. مفاهیم مهمی مثل چندگانگی زاویه، تناوب توابع مثلثاتی، و دایره واحد را در حل مسائل به کار گیرد.

❖ معادلات مثلثاتی: مساوات است که برای بعضی از قیمت‌ها دوطرف مساوات باهم مساوی گردند.

❖ فورمول دریافت تمام زاوایای که دارای یک نسبت مثلثاتی مساوی اند.

$$\begin{cases} x = k2\pi + \theta \\ x = (2k + 1)\pi - \theta \end{cases} \quad \text{دارای } \sin \text{ و } \csc \text{ های مساوی باشند:}$$

$$x = k2\pi \mp \theta \quad \text{دارای } \cos \text{ و } \sec \text{ های مساوی باشند:}$$

$$x = k\pi + \theta \quad \text{دارای } \tan \text{ و } \cot \text{ های مساوی باشند:}$$

❖ معادلات یک مجهول درجه اول مثلثاتی:

$$a \sin x + b = 0 \quad (1)$$

$$a \cos x + b = 0 \quad (2)$$

$$a \tan x + b = 0 \quad (3)$$

$$a \cot x + b = 0 \quad (4)$$

$$a \sec x + b = 0 \quad (5)$$

$$a \csc x + b = 0 \quad (6)$$

$$(7) \quad \text{برای حل نمودن آنها ابتداء معلوم و مجهول نموده سپس حل می نماییم.}$$

$$\begin{aligned} 1) 2 \sin x - 1 &= 0 & x &=? \\ \Rightarrow 2 \sin x &= 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} = 30^\circ \\ x = 2n\pi + \frac{\pi}{6} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) 2\sqrt{3} \sin x - \sqrt{6} &= 0 \\ \Rightarrow 2\sqrt{3} \sin x &= \sqrt{6} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{6}{3}} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \sqrt{2} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} = 45^\circ \\ x = 2n\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) 2\sqrt{3} \tan x - 2 &= \tan x + \sqrt{12} \\ \Rightarrow \tan x - 2\sqrt{3} \tan x &= -2 - \sqrt{12} / (-1) \\ \Rightarrow 2\sqrt{3} \tan x - \tan x &= \sqrt{12} + 2 \Rightarrow \tan x (2\sqrt{3} - 1) = 2\sqrt{3} + 2 \\ \Rightarrow \tan x &= \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{2(\sqrt{3} - 1)} \Rightarrow \tan x = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \Rightarrow x = 75^\circ \Rightarrow \begin{cases} x = 75^\circ \\ x = 2n\pi + 75^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

❖

❖ معادلات درجه دوم مثلثاتی شکل

❖ $(aw^2 + bw + c = 0)$ دارد: طوریکه a, b, c اعدادی ثابت بوده و به جای w یکی از نسبت‌های مثلثاتی

باشد. برای حل آن ابتداء قیمت Δ بدست آورده شود:

$$(1) \quad \Delta = b^2 - 4ac > 0 \quad \text{دو جذر دارد.}$$

$$(2) \quad \Delta = b^2 - 4ac < 0 \quad \text{یک جذر دارد.}$$

$$(3) \quad \Delta = b^2 - 4ac = 0 \quad \text{جذر ندارد.}$$

❖ حل معادلات شکل $(a \sin x + b \cos x = c)$:

$$(1) \quad \text{شرط حل } a^2 + b^2 \geq c^2$$

$$(2) \quad \text{برای حل نمودن این نوع معادلات ابتداء تمام حدود را تقسیم } a \text{ نموده و سپس } \frac{b}{a} \text{ را به } \tan x \text{ تعویض نموده تا}$$

$$\text{معادله شکل } \sin(x \mp \theta) = k \text{ را اختیار نماید.}$$

حل معادلات شکل $(a \sin x \cdot \cos x = C)$

$$1) 4 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin 2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin 60 \Rightarrow x = 60^\circ$$

$$2) 2 \sin 2x \frac{1}{2 \sec 2x} = 0$$

$$\Rightarrow \sin 2x \cdot \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin^2 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ x = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

❖ حل معادلات که شکل $(a \sin^2 x + b \cos^2 x + c \sin x \cos x = d)$ را دارند: برای حل نمودن این نوع معادلات اگر $a = d$ باشد تمام حدود معادله را تقسیم $\sin^2 x$ و اگر $b = d$ باشد تمام حدود معادله تقسیم $\cos^2 x$ و اگر $a, b \neq d$ باشد اطراف معادله را تقسیم $\sin^2 x$ و $\cos^2 x$ می نماییم. سیستم معادلات دو مجهوله مثلثاتی:

حل معادلات درجه دوم که شکل $(a \sin^2 x + b \cos^2 x + c \sin x \cos x = d)$ را دارند

در معادله بالا a, b, c ضرایب مجهول ها و d عدد ثابت می باشد و برای حل نمودن این نوع معادلات اگر $a = d$ باشد تمام حدود معادله را تقسیم $\sin^2 x$ و اگر $b = d$ باشد تمام حدود معادله را تقسیم $\cos^2 x$ و اگر $a, b \neq d$ باشد اطراف معادله را تقسیم $\sin^2 x$ و $\cos^2 x$ می نماییم.

❖ مثال: معادله ذیل را حل کنید.

$$1) 3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x = 3$$

$$\Rightarrow 3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x = 3 \div \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \frac{3 \sin^2 x}{\sin^2 x} + \frac{4 \cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\sqrt{3} \sin x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{3}{\sin^2 x}$$

$$\Rightarrow 3 + 4 \cot^2 x - \sqrt{3} \cot x = 3(\csc x) \Rightarrow 3 + 4 \cot^2 x - \sqrt{3} \cot x = 3(1 + \cot^2 x)$$

$$\Rightarrow 3 + 4 \cot^2 x - \sqrt{3} \cot x = 3 + 3 \cot^2 x \Rightarrow 4 \cot^2 x - 3 \cot^2 x - \sqrt{3} \cot x = 0$$

$$\Rightarrow \cot^2 x - \sqrt{3} \cot x = 0 \Rightarrow \cot x(\cot x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\begin{cases} \Rightarrow \cot x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow \cot x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \cot x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$2) \cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0$$

$$\begin{array}{cc} \cos x & -2 \\ & \diagdown \\ & \diagup \\ \cos x & -1 \end{array}$$

$$\Rightarrow (\cos x - 2)(\cos x - 1) \Rightarrow \begin{cases} \cos x - 2 = 0 \Rightarrow \cos x = 2 \\ \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \{x_1 = 0 = 2\pi \Rightarrow x_1 = 2n\pi + 0$$

معادلات مثلثاتی که نسبت هایی آن قرینه یکدیگر اند

❖ مثال: معادلات ذیل را حل نمایید.

$$1) \sin(x - 20) - \sin(20 - x) = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sin(x - 20) - \sin(-(x - 20)) = \sqrt{3} \Rightarrow \sin(x - 20) + \sin(x - 20) = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2 \sin(x - 20) = \sqrt{3} \Rightarrow \sin(x - 20) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin(x - 20) = \sin 60$$

$$\Rightarrow x - 20 = 60 \Rightarrow x = 60 + 20 \Rightarrow x = 80^\circ$$

$$2) 3 \tan(3x - 15) + \tan(15 - 3x) = 2$$

$$\Rightarrow 3 \tan(3x - 15) + \tan(-(3x - 15)) = 2$$

$$\Rightarrow 3 \tan(3x - 15) - \tan(3x - 15) = 2$$

$$\Rightarrow 2 \tan(3x - 15) = 2 \Rightarrow \tan(3x - 15) = 1 \Rightarrow \tan(3x - 15) = \tan 45$$

$$\Rightarrow 3x - 15 = 45 \Rightarrow 3x = 60 \Rightarrow x = 20^\circ$$

$$\begin{cases} \tan x = \frac{1}{3} \\ \tan y = 3 \\ x + y = 90 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\tan x - \tan y}{\tan x + \tan y} &= \frac{1-3}{1+3} \Rightarrow \frac{\frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}}{\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}} = \frac{1-3}{1+3} \\ \Rightarrow \frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)} &= \frac{1-3}{1+3} \Rightarrow \frac{\sin(x-y)}{\sin 90} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin(x-y) = -\frac{1}{2} \\ \Rightarrow \sin(x-y) &= \sin 210 \Rightarrow x-y = 210 \dots\dots\dots (2) \\ \begin{cases} x+y=90 \dots\dots\dots (1) \\ x-y=210 \dots\dots\dots (2) \end{cases} \\ 2x &= 300 \Rightarrow x = 150 \\ x-y &= 90 \dots\dots\dots (1) \\ \Rightarrow 150-y &= 90 \Rightarrow -y = -60 \Rightarrow y = 60 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \tan x + \tan y = \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan(x+y) \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{1 - \tan x \tan y} \Rightarrow 1 - \tan x \tan y = \frac{3}{\tan \frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow 1 - \tan x \tan y = \frac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 1 - \tan x \tan y = 0 \Rightarrow -\tan x \tan y = -1$$

$$\Rightarrow \tan x \tan y = 1 \Rightarrow \tan x = \frac{1}{\tan y}$$

$$\Rightarrow \tan x + \tan y = \frac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{1}{\tan y} + \tan y = \frac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{1 + \tan^2 y}{\tan y} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow 3 + 3 \tan^2 y = 4\sqrt{3} \tan y \Rightarrow 3 \tan^2 y - 4\sqrt{3} \tan y + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (3 \tan y - \sqrt{3})(\tan y - \sqrt{3}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 30^\circ, y_2 = 60^\circ \\ x_1 = 60^\circ, x_2 = 30^\circ \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \diamond \text{ نوع اول: } \begin{cases} \sin x \mp \sin y = a \\ x \mp y = \theta \end{cases}, \begin{cases} \cos x \mp \cos y = a \\ x \mp y = \theta \end{cases} \\ (1) \text{ شرط حل: } a^2 - 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \geq 0 \\ (2) \text{ برای حل نمودن این معادلات از فورمول های تبدیل جمع و تفاضل به ضرب استفاده می نماییم.} \\ \diamond \text{ نوع دوم: } \begin{cases} \sin x \cdot \cos y = a \\ x \mp y = \theta \end{cases}, \begin{cases} \cos x \cdot \cos y = a \\ x \mp y = \theta \end{cases}, \begin{cases} \sin x \cdot \sin y = a \\ x \mp y = \theta \end{cases} \\ (1) \text{ شرط حل: } -\cos^2 \frac{\theta}{2} \leq a \leq \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ (2) \text{ برای حل نمودن این معادلات از فورمول های تبدیل ضرب به مجموع و تفاضل استفاده گردد.} \\ \diamond \text{ نوع سوم: } \begin{cases} \frac{\sin x}{\cos y} = a \\ x \mp y = \theta \end{cases}, \begin{cases} \frac{\cos x}{\cos y} = a \\ x \mp y = \theta \end{cases}, \begin{cases} \frac{\sin x}{\sin y} = a \\ x \mp y = \theta \end{cases} \\ (1) \text{ برای حل این نوع معادلات ابتداء از خواص تناسب و سپس از فورمول جمع و تفاضل به ضرب استفاده گردد.} \\ \diamond \text{ نوع چهارم: } \begin{cases} \tan x \mp \tan y = a \\ x \mp y = \theta \end{cases} \\ (1) \text{ شرط حل: } a^2 - 4 + 4a \cot \theta \geq 0 \\ (2) \text{ برای حل این نوع معادلات از رابطه } \tan(x \mp y) \text{ استفاده گردد.} \\ \diamond \text{ نوع پنجم: } \begin{cases} \tan x \cdot \tan y = a \\ x \mp y = \theta \end{cases} \\ (1) \text{ شرط حل: } -1 \leq \frac{1+a}{1-a} \cos \theta \leq 1 \\ (2) \text{ برای حل این معادلات از فورمول تبدیل ضرب به مجموع و تفاضل استفاده گردد.} \\ \diamond \text{ نوع ششم: } \begin{cases} \frac{\tan x}{\tan y} = a \\ x \mp y = \theta \end{cases} \\ (1) \text{ شرط حل: } -1 \leq \frac{a-1}{a+1} \sin \theta \leq 1 \end{aligned}$$

برای حل این نوع معادلات از خواص تناسب استفاده نموده سپس معادله را ساده می نماییم.

مثال : معادله ذیل را حل نمایید

$$1) \begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)] = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow -\frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(x-y) \right] = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} [0 - \cos(x-y)] = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(x-y) = \cos \frac{\pi}{6} \Rightarrow x-y = \frac{\pi}{6} \dots\dots\dots (2)$$

$$\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots (1) \\ x-y = \frac{\pi}{6} \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$x+y = \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots (1)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{6} + y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = \frac{\pi}{6} = 2n\pi + \frac{\pi}{6}$$

❖ مثال: معادله ذیل را حل نمایید.

❖ مثال: معادله ذیل را حل نمایید.

$$1) \begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = 1 \Rightarrow 2 \sin \frac{\frac{\pi}{2}}{2} \cos \frac{x-y}{2} = 1$$

$$\Rightarrow 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{(x-y)}{2} = 1 \Rightarrow 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{x-y}{2} = 1 \Rightarrow \sqrt{2} \cos \frac{x-y}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \cos \frac{x-y}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos \frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos \frac{x-y}{2} = \cos \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{x-y}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x-y = \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots (2)$$

$$x+y = \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots (1)$$

$$x-y = \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots (2)$$

$$2x = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} = 90^\circ = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$x+y = \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\pi}{2} + y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = 0 = 2n\pi + 0$$

$$\begin{cases} \tan x \cdot \tan y = 1 \\ x - y = 30 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan x \cdot \tan y = 1 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin y}{\cos y} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{-\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)]}{\frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{-(\cos(x+y) - \cos 30)}{\cos(x+y) + \cos 30} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\cos 30 - \cos(x-y)}{\cos 30 + \cos(x+y)} = 1 \Rightarrow \cos 30 - \cos(x+y) = \cos 30 + \cos(x+y)$$

$$\Rightarrow \cos(x+y) + \cos(x+y) = 0 \Rightarrow 2 \cos(x+y) = 0 \Rightarrow \cos(x+y) = 0$$

$$\Rightarrow \cos(x+y) = \cos 90^\circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y = 30 \dots\dots\dots (1) \\ x+y = 90 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

$$2x = 120 \Rightarrow x = 60 = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$x+y = 90 \dots\dots\dots (2)$$

$$\Rightarrow 60 + y = 90 \Rightarrow y = 30 = 2n\pi + \frac{\pi}{6}$$

❖ مثال: معادله ذیل را حل نمایید.

$$1) \begin{cases} \frac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{3} \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{3} = \frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\Rightarrow \frac{2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \Rightarrow \frac{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \Rightarrow \tan\left(\frac{x-y}{2}\right) = \tan 75^\circ \Rightarrow \frac{x-y}{2} = 75 \Rightarrow x-y = 150 \dots\dots\dots (2)$$

$$\begin{cases} x+y = 90 \dots\dots\dots (1) \\ x-y = 150 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

$$2x = 240 \Rightarrow x = 120^\circ = 2n\pi + 120^\circ$$

$$x+y = 90 \dots\dots\dots (1)$$

$$\Rightarrow 120 + y = 90 \Rightarrow y = -30^\circ = 2n\pi - 30^\circ$$