

راهنمای آموزشی صنف هشتم دوره چهارم.

## اهداف آموزشی

در پایان این دوره، شاگردان باید قادر باشند:

1. مفهوم تناظر و انواع آن (محوری و مرکزی) را تعریف و تصویر یک نقطه یا شکل را رسم نمایند.
2. خواص و ویژگی‌های مثلث متساوی‌الساقین را بیان و برای یافتن زاویه یا ضلع مجهول استفاده کنند.
3. قضیه فیثاغورس و معکوس آن را تشخیص، اثبات و در حل مسائل هندسی و عددی به کار ببرند.
4. روابط خاص در مثلث‌های قائم‌الزاویه با زوایای  $30^\circ$  و  $60^\circ$  را بشناسند و در محاسبه اضلاع استفاده کنند.
5. مفهوم ناصف زاویه را درک کرده و از آن برای تحلیل و تقسیم متناسب ضلع مقابل استفاده نمایند.

## راهنمای آموزش مفاهیم هندسی

موضوعات شامل: تناظر، تناظر محوری، تناظر مرکزی، مثلث متساوی‌الساقین، قضیه فیثاغورس، معکوس قضیه فیثاغورس، مثلث قائم‌الزاویه (ویژه زوایای  $30^\circ$  و  $60^\circ$ )، ناصف زاویه

## ۱. تناظر (Correspondence)

## تعریف مفهومی:

تناظر به معنی ارتباط منظم و مشخص میان نقاط دو شکل است، طوری که هر نقطه در شکل اول با یک نقطه در شکل دوم مطابق باشد.

## الف. تناظر محوری (Axial Symmetry)

## تعریف:

در تناظر محوری، تصویر یک نقطه نسبت به یک خط (محور) (به گونه‌ای ساخته می‌شود که فاصله دو نقطه از خط برابر و این خط عمود بر خط وصل‌کننده آن‌ها باشد).

## فرمول:

اگر نقطه  $A(x, y)$  باشد و محور تقارن خط عمودی  $x = a$ ، تصویر نقطه:

$$A'(2a - x, y)$$

اگر محور افقی باشد:  $y = b$

$$A'(x, 2b - y)$$

## تمرین:

1. تصویر نقطه  $(3, 5)$  نسبت به محور  $x = 4$  را پیدا کنید.
2. تصویر مثلثی با رأس‌های مشخص را نسبت به محور افقی رسم کنید.

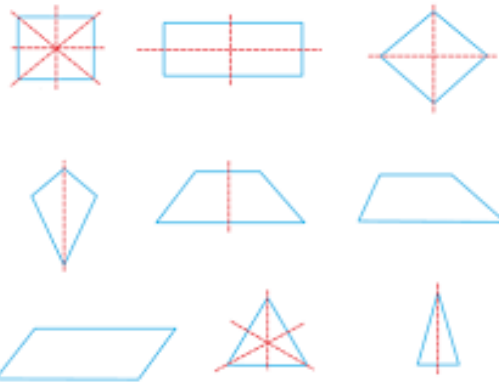
## فعالیت:

رسم شکل و تصویر آن با آینه‌ی کوچک یا کاغذ شفاف. مقایسه‌ی زاویه‌ها و فاصله‌ها.

## ب. تناظر مرکزی (Central Symmetry)

## تعریف:

در تناظر مرکزی، تصویر هر نقطه نسبت به یک نقطه معین (مرکز تقارن) ساخته می‌شود، طوری که مرکز در وسط دو نقطه باشد.



روابط مهم:

اگر  $AB = AC$ ، آنگاه:

$$\angle B = \angle C$$

و برعکس، اگر  $\angle B = \angle C$ ، آنگاه:

$$AB = AC$$

تمرین:

1. رسم مثلث با دو ضلع مساوی و محاسبه زوایای آن.
2. اگر دو زاویه مساوی داده شود، آیا مثلث متساوی الساقین است؟

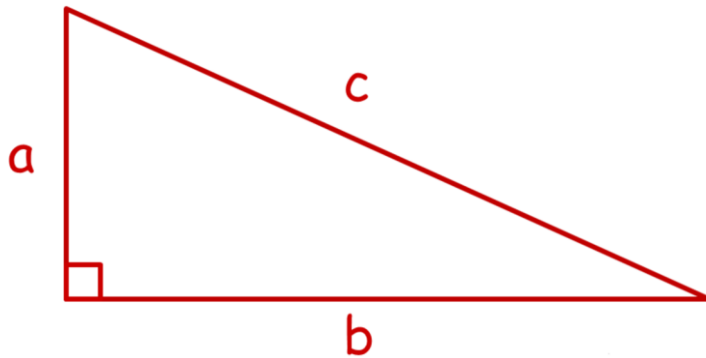
فعالیت:

با تا کردن کاغذ یک مثلث متساوی الساقین بسازید و ناصف، ارتفاع و میانه را مقایسه کنید.

### ۳. قضیه فیثاغورس (Pythagorean Theorem)

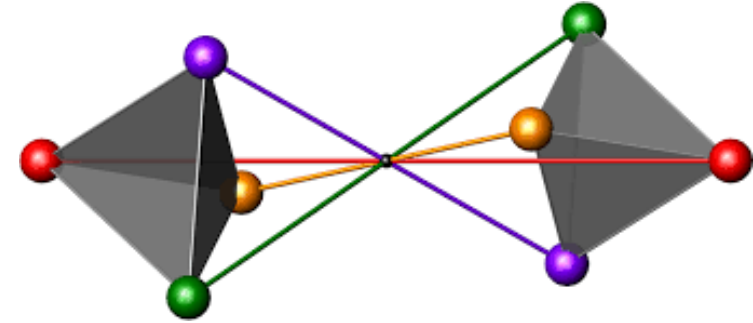
تعریف مفهومی:

در یک مثلث قائم الزاویه، مربع طول وتر مساوی با مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر است.



فرمول:

$$c^2 = a^2 + b^2$$



فرمول:

اگر نقطه  $A(x, y)$  و مرکز تقارن  $O(a, b)$  باشد:

$$A'(2a - x, 2b - y)$$

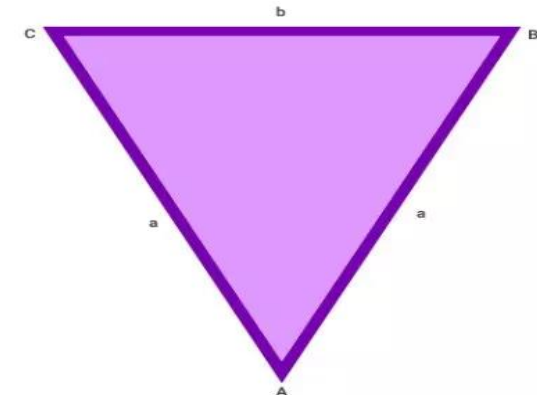
تمرین:

1. تصویر نقطه  $(2, 3)$  نسبت به نقطه‌ی مرکز تقارن  $(4, 5)$  را محاسبه کنید.
2. تصویر یک چندضلعی نسبت به مرکز رسم شود.

### ۲. مثلث متساوی الساقین (Isosceles Triangle)

تعریف مفهومی:

مثلثی است که در آن دو ضلع با هم مساوی باشند. این مساوات باعث می‌شود زوایای مقابل این دو ضلع نیز مساوی باشند.



که در آن  $c$  وتر) ضلع روبه‌روی زاویه قائمه (و  $a, b$  اضلاع دیگر اند.

تمرین:

- اگر  $a = 6$  و  $b = 8$  ، مقدار  $c$  را پیدا کنید.
- آیا اضلاع 7, 24, 25 می‌توانند مثلث قائم‌الزاویه بسازند؟

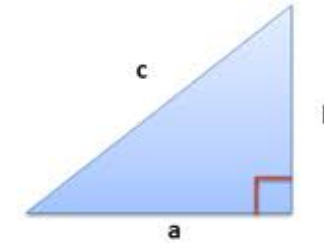
فعالیت:

با استفاده از گچ یا نوار در حویلی سه‌ضلعی‌های مختلف ساخته و فیثاغورس را بررسی کنید.

#### ۴. معکوس قضیه فیثاغورس

تعریف مفهومی:

اگر در یک مثلث، مربع بزرگ‌ترین ضلع برابر مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.



فرمول:

اگر  $c^2 = a^2 + b^2$  مثلث قائم‌الزاویه است.

تمرین:

بررسی کنید که آیا مثلث‌هایی با اضلاع ۵، ۱۲ و ۱۳ یا ۹، ۴۰، ۴۱ قائم هستند.

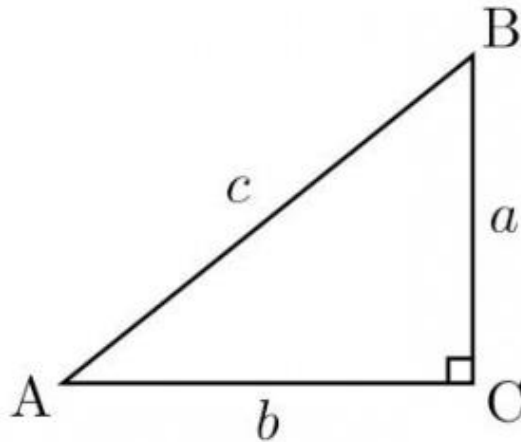
فعالیت:

نوشتن ۵ مجموعه از اعداد که بتوان با آن‌ها مثلث قائم ساخت.

#### ۵. مثلث قائم با زوایای ۳۰ و ۶۰ درجه

تعریف مفهومی:

در مثلث قائم که یک زاویه‌اش ۳۰ درجه و دیگری ۶۰ درجه باشد، روابط خاصی میان اضلاع وجود دارد.



روابط:

- ضلع مقابل زاویه ۳۰ برابر با نصف وتر است.

$$a = \frac{1}{2}c$$

- ضلع مقابل زاویه ۶۰ برابر است با:

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

تمرین:

اگر وتر  $c = 10$  ، ضلع مقابل زاویه ۳۰ و ۶۰ را پیدا کنید.

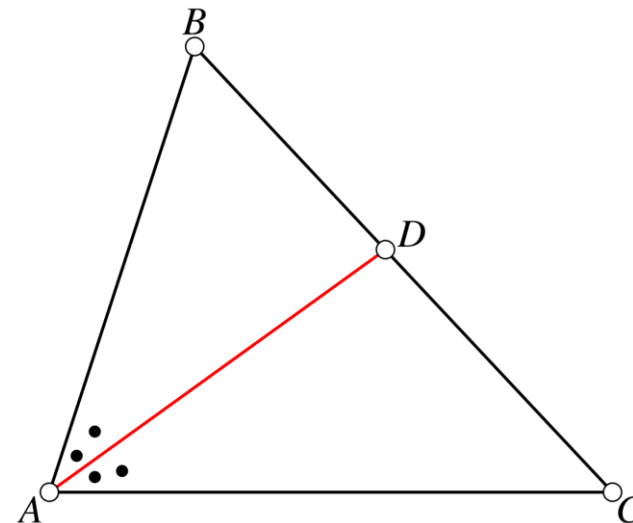
## فعالیت:

با استفاده از پرگار و نقاله مثلث ۳۰-۶۰-۹۰ درجه رسم کرده و طول اضلاع را اندازه بگیرید و روابط را بررسی کنید.

## ۶. ناصف زاویه (Angle Bisector)

## تعریف مفهومی:

ناصف زاویه پاره‌خطی است که یک زاویه را به دو زاویه مساوی تقسیم می‌کند و از رأس آن به ضلع مقابل کشیده می‌شود.



## رابطه نسبت:

اگر ناصف زاویه A ضلع مقابل BC را در نقطه D قطع کند:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

## تمرین:

در مثلثی با  $AB = 6$ ،  $AC = 4$ ، اگر ناصف زاویه A ضلع BC را در نقطه D قطع کند، نسبت BD به DC را بیابید.

## فعالیت:

ناصف زاویه را با پرگار رسم کرده و بررسی کنید آیا زاویه به دو بخش مساوی تقسیم شده است یا نه.

## جدول خلاصه فرمول‌ها و مفاهیم

| موضوع               | فرمول یا رابطه مهم                        | تعریف مفهومی کوتاه                                    |
|---------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| تناظر محوری         | $A'(2a - x, y)$ یا $A'(x, 2b - y)$        | قرینه‌ی شکل نسبت به یک خط                             |
| تناظر مرکزی         | $A'(2a - x, 2b - y)$                      | قرینه‌ی شکل نسبت به یک نقطه                           |
| مثلث متساوی الساقین | $AB = AC \Rightarrow \angle B = \angle C$ | دو ضلع مساوی $\rightarrow$ دو زاویه مساوی             |
| فیثاغورس            | $c^2 = a^2 + b^2$                         | در مثلث قائم: وتر مربع = جمع مربع های اضلاع           |
| معکوس فیثاغورس      | $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow$ قائم        | اگر این تساوی برقرار باشد $\rightarrow$ مثلث قائم است |
| مثلث ۳۰-۶۰-۹۰       | $b = \frac{\sqrt{3}}{2}ca = \frac{1}{2}c$ | روابط خاص بین اضلاع                                   |
| ناصف زاویه          | $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$           | تقسیم‌کننده زاویه به دو بخش مساوی                     |

## پیشنهاد ساختاری برای آموزش:

| جلسه | موضوع               | تمرین خانگی پیشنهادی               | فعالیت در صنف              |
|------|---------------------|------------------------------------|----------------------------|
| ۱    | تناظر مرکزی و محوری | تصویر نقاط و اشکال رسم شود         | رسم با آینه یا شفاف کاغذ   |
| ۲    | مثلث متساوی الساقین | حل چند مسئله از کتاب درسی          | تا کردن کاغذ و اندازه‌گیری |
| ۳    | قضیه فیثاغورس       | یافتن طول وتر در چند مثلث          | مثال واقعی با متر یا خط کش |
| ۴    | معکوس فیثاغورس      | تعیین نوع مثلث با استفاده از اضلاع | بررسی عددی چند سه‌تایی     |
| ۵    | مثلث ۳۰ و ۶۰ درجه   | محاسبه ضلع مجهول با داشتن وتر      | رسم دقیق با نقاله          |
| ۶    | ناصف زاویه          | تحلیل تقسیم ضلع با نسبت            | رسم دقیق با پرگار          |

## مثال های آموزشی:

## ۱. تناظر محوری

✓مثال ۱:

نقطه‌ای به مختصات  $A(5,2)$  داریم. تصویر آن را نسبت به محور  $x = 3$  پیدا کنید.

حل: فرمول:

$$A'(2a - x, y) = A'(2 \times 3 - 5, 2) = A'(1, 2)$$

✓مثال ۲:

نقطه  $B(4,6)$  را نسبت به محور افقی  $y = 2$  قرینه کنید.

حل:

$$B'(x, 2b - y) = B'(4, 2 \times 2 - 6) = B'(4, -2)$$

## ۲. تناظر مرکزی

✓مثال ۱:

مرکز تقارن  $O(2,3)$  و نقطه  $A(5,1)$  است. تصویر آن را بیابید.

حل:

$$A'(2 \times 2 - 5, 2 \times 3 - 1) = A'(-1, 5)$$

✓مثال ۲:

مرکز تقارن  $O(0,0)$  و نقطه  $B(-3,7)$  باشد.

$$B'(2 \times 0 - (-3), 2 \times 0 - 7) = B'(3, -7)$$

## ۳. مثلث متساوی الساقین

✓مثال ۱:

در مثلثی  $AB = AC$  و  $\angle B = 40^\circ$ . اندازه  $\angle C$  و  $\angle A$  را بیابید.

حل:

$$\angle C = 40^\circ \Rightarrow \angle A = 180^\circ - 40^\circ - 40^\circ = 100^\circ \quad (\text{هاضلع تساوی دلیل به})$$

✓مثال ۲:

در مثلثی  $\angle B = \angle C = 65^\circ$  آیا مثلث متساوی الساقین است؟بله. چون دو زاویه مساوی اند، پس ضلع های مقابل آن ها نیز برابرند  $AB = AC$ :

## ۴. قضیه فیثاغورس

✓مثال ۱:

در مثلثی  $a = 9$ ،  $b = 12$  طول وتر  $c$  را بیابید.

$$c = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$$

✓مثال ۲:

مثلثی با  $b = 7$ ،  $c = 25$ ،  $a$  را بیابید:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{625 - 49} = \sqrt{576} = 24$$

## ۵. معکوس قضیه فیثاغورس

✓مثال ۱:

آیا اضلاع ۶، ۸ و ۱۰ می‌توانند یک مثلث قائم باشند؟

بررسی:

$$10^2 = 100, \quad 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow \text{است قائم}$$

✓مثال ۲:

آیا اضلاع ۹، ۱۰، ۱۲ می‌توانند مثلث قائم باشند؟

بررسی:

$$12^2 = 144, \quad 9^2 + 10^2 = 81 + 100 = 181 \neq 144 \Rightarrow \text{نیست قائم}$$

۶. مثلث بازوای ۳۰ و ۶۰ درجه

✓مثال ۱:

وتر مثلث ۳۰-۶۰-۹۰ برابر ۱۲ است. اضلاع دیگر را بیابید.

$$a = \frac{1}{2} \times 12 = 6, \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 12 = 6\sqrt{3}$$

✓مثال ۲:

در مثلث ۳۰-۶۰-۹۰ ضلع مقابل زاویه ۶۰ درجه برابر  $8\sqrt{3}$  است. وتر را بیابید.

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2} c \Rightarrow c = \frac{2b}{\sqrt{3}} = \frac{2 \times 8\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 16$$

۷. ناصف زاویه

✓مثال ۱:

در مثلثی  $AB = 6$ ،  $AC = 3$ ، ناصف زاویه  $A$  ضلع  $BC$  را در  $D$  قطع کرده. نسبت  $BD:DC$  چیست؟

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow BD = 2 \times DC$$

✓مثال ۲:

در مثلثی  $AB = 5$ ،  $AC = 10$ ، اگر ناصف زاویه  $A$  ضلع مقابل را به دو بخش تقسیم کند، نسبت آن‌ها چیست؟

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$