

راهنمای آموزشی صنف دهم دوره چهارم.

توابع و گراف آنها

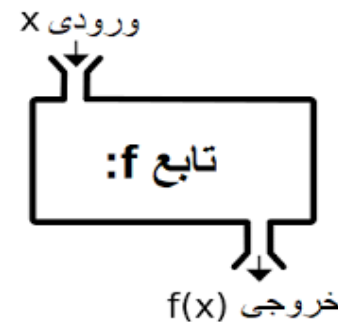
اهداف یادگیری

در پایان این درس، دانش آموز باید بتواند:

1. مفهوم تابع را درک کرده و تشخیص دهد چه رابطه‌ای یک تابع است.
2. ناحیه تعریف تابع (دامنه) را از طریق رابطه جبری یا نمودار گرافیکی مشخص کند.
3. مقدار تابع (قیمت تابع) را برای مقادیر مختلف از دامنه محاسبه کند.
4. گراف توابع پایه‌ای و خاص را ترسیم و تحلیل کند.
5. رفتار افزایشی (متزاید) یا کاهشی (متناقص) تابع را از طریق فرمول یا گراف تعیین کند.
6. تأثیر انتقال‌های افقی و عمودی را بر گراف تابع بررسی و تابع جدید را بنویسد.
7. از گراف تابع، ویژگی‌های آن مثل دامنه، برد، تقاطع با محورها، تقارن و نقاط بحرانی را استخراج کند.

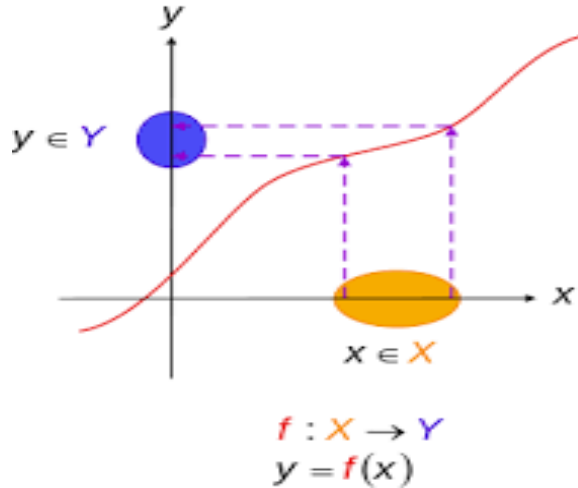
1. تعریف تابع

تابع رابطه‌ای است که به هر عضو از دامنه فقط یک مقدار در برد نسبت می‌دهد. نماد تابع:

 $f(x) \in Y$ یک دقیقاً، $x \in X$ هر ازای به $f: X \rightarrow Y$

مثال $f(x) = x^2$ ، به ازای هر عدد حقیقی، فقط یک خروجی دارد $\rightarrow$ تابع اما رابطه‌ای مثل $y^2 = x \rightarrow$ برای بعضی x ها دو مقدار y دارد $\rightarrow$ تابع نیست

2. ناحیه تعریف (دامنه) تابع

دامنه تابع مجموعه‌ای از مقادیر x است که تابع در آن‌ها تعریف شده است.

دامنه یافتن برای کلی قواعد

نوع تابع	محدودیت دامنه
چندجمله‌ای (مثلاً $x^2 + 3x - 1$)	همه‌ی اعداد حقیقی
کسری (مثلاً $\frac{1}{x-a}$)	مخرج $\neq 0$
جز زوج (مثلاً $\sqrt{x-b}$)	عبارت زیر جز ≥ 0
جز در مخرج (مثلاً $\frac{1}{\sqrt{x}}$)	زیر جز > 0

مثال ۱:

تابع $f(x) = \frac{1}{x-3}$

محدودیت: مخرج نباید صفر شود

$$x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$$

دامنه $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

✓مثال ۲:

تابع $f(x) = \sqrt{2x + 1}$ برای جز زوج باید:

$$2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

✦دامنه $[-\frac{1}{2}, \infty)$:

3. ✦قیمت تابع (مقدار تابع)

برای محاسبه $f(a)$ ، کافیست مقدار a را در فرمول تابع قرار دهیم.

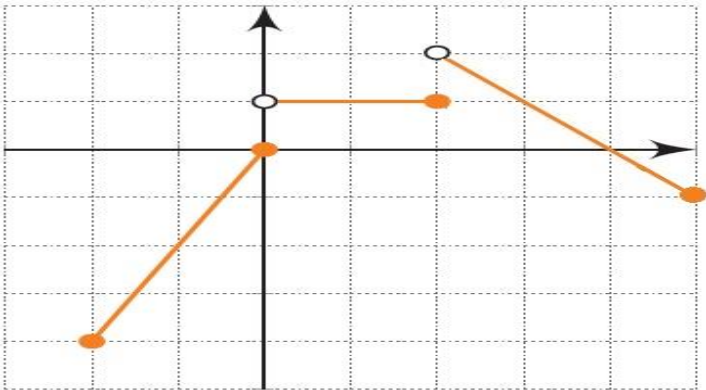
✓مثال ۳:

اگر $f(x) = x^2 - 3x + 2$ ، مقدار $f(2)$ چیست؟

$$f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$$

4. ✦یافتن دامنه از روی گراف تابع

گراف تابع را بررسی می‌کنیم و نقاطی از محور x که روی آن‌ها گراف وجود دارد را مشخص می‌کنیم.



دامنه : $[-2, +5]$

✓مثال ۴:

اگر گراف فقط از $x = -2$ تا $x = 5$ وجود دارد، آنگاه:

✦دامنه $[-2, 5]$:

نکته: نقاط پر یا توخالی (دایره باز یا بسته) نشان‌دهنده وجود یا نبود مقدار تابع در آن نقطه هستند.

5. ✦توابع خاص و گراف آن‌ها

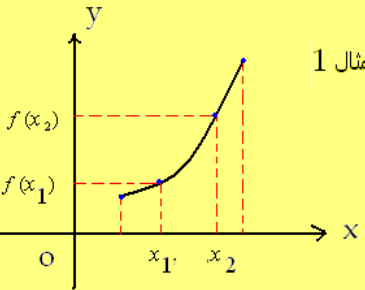
نام تابع	رفتار	تقارن	برد	دامنه	فرمول
تابع خطی	ثابت یا متزايد یا متناقص	ندارد	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f(x) = ax + b$
تابع درجه ۲	متزايد یا متناقص	نسبت به محور تقارن	بستگی به a دارد	$\mathbb{R}$	$f(x) = ax^2 + bx + c$
تابع ریشه دوم	متزايد	ندارد	$y \geq 0$	$x \geq 0$	$f(x) = \sqrt{x}$
سستابع معکوس	کاهنده در هر بازه	نسبت به مبدأ	$y \neq 0$	$x \neq 0$	$f(x) = \frac{1}{x}$

6. ✦توابع متزايد و متناقص

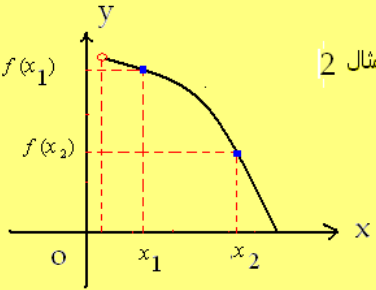
تعریف:

- **متزايد:** اگر $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- **متناقص:** اگر $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

مثال 1

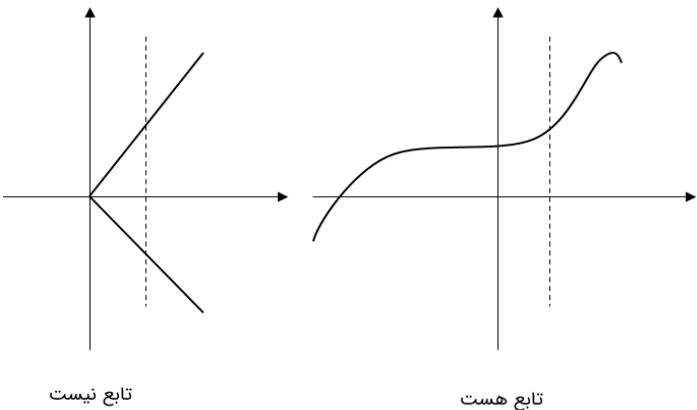


مثال 2



روش تشخیص:

1. از روی مشتق تابع (در ریاضی پیشرفته)
2. از روی شیب خط (در توابع خطی)
3. با تحلیل نمودار (در توابع گرافیکی)



7. انتقال گراف‌ها

انتقال افقی:

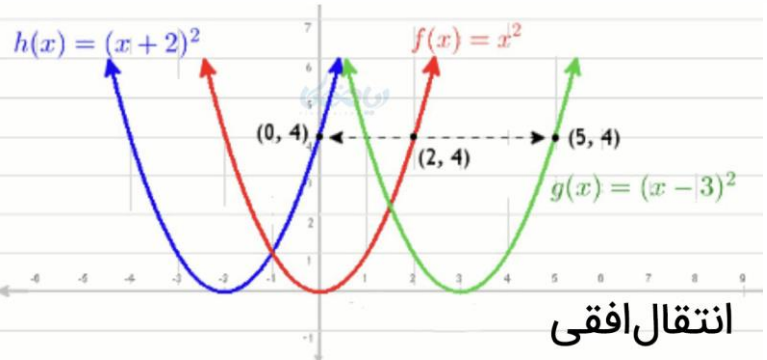
- انتقال به راست به اندازه a واحد: $f(x - a)$
- انتقال به چپ به اندازه a واحد: $f(x + a)$

مثال ۵:

تابع پایه $f(x) = x^2$:

تابع: $g(x) = (x - 3)^2$ انتقال به راست به اندازه 3 واحد

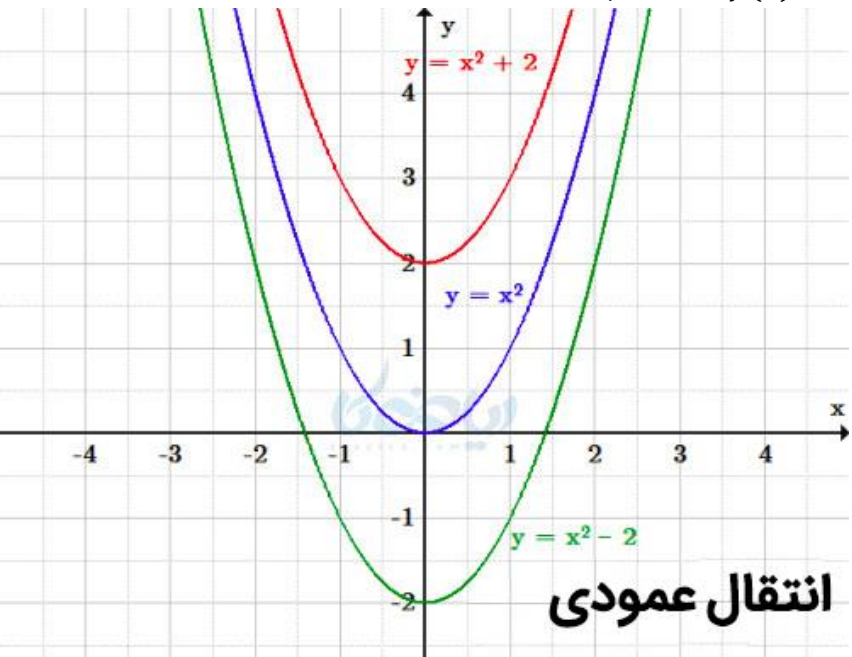
تابع: $h(x) = (x + 2)^2$ انتقال به چپ به اندازه 2 واحد



انتقال افقی

انتقال عمودی:

- انتقال به بالا به اندازه b واحد: $f(x) + b$
- انتقال به پایین به اندازه b واحد: $f(x) - b$



انتقال عمودی

مثال ۶:

تابع پایه $f(x) = x^2$:

تابع جدید $\rightarrow f(x - 2) + 3 = (x - 2)^2 + 3$ انتقال ۲ واحد به راست و ۳ واحد به بالا

تمرین های طبقه بندی شده

تمرین ۱ - دامنه تابع

دامنه توابع زیر را بیابید:

1. $f(x) = \frac{1}{x-5}$

2. $f(x) = \sqrt{3-x}$

3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

تمرین ۲ - مقدار تابع

1. اگر $f(x) = x^2 - x$ ، مقدار $f(-2)$ را بیابید.

2. اگر $f(x) = \sqrt{x+1}$ ، مقدار $f(8)$ را بیابید.

تمرین ۳ - تحلیل گراف

نمودار تابع $f(x) = x^2$ را رسم کنید و مشخص کنید:

- رأس کجاست؟
- تابع در چه بازه ای متناقص است؟
- تابع در چه بازه ای متزاید است؟

تمرین ۴ - انتقال گراف

تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را:

- ۲ واحد به راست منتقل کنید → تابع جدید چیست؟
- ۳ واحد پایین ببرید → تابع جدید چیست؟
- سپس هر دو را با هم انجام دهید → تابع نهایی چیست؟

فعالیت های کلاسی

◆ فعالیت ۱: نمودار و دامنه

معلم گراف تابعی ساده (مثلاً باره خط، سهمی، یا ریشه ای) را نشان دهد. دانش آموزان باید:

- دامنه و برد تابع را بخوانند
- مقدار تابع را برای چند نقطه دلخواه بیابند

◆ فعالیت ۲: گروهی - طراحی گراف انتقال یافته

گروه ها یک تابع پایه مثل $f(x) = x^2$ را انتخاب کنند. به کمک کاغذ میلیمتری یا دیجیتالی، انتقال هایی مثل $f(x-1) + 2$ را اعمال کنند، تابع جدید بنویسند، و گراف را رسم کنند.

◆ فعالیت ۳: کارت بازی تابع

معلم کارتهایی تهیه کند شامل:

- فرمول تابع
- گراف
- دامنه و برد
- نوع انتقال

دانش آموزان باید کارتهایی را که به هم مربوط هستند، پیدا کرده و تطبیق دهند.