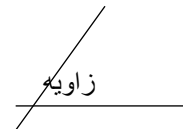
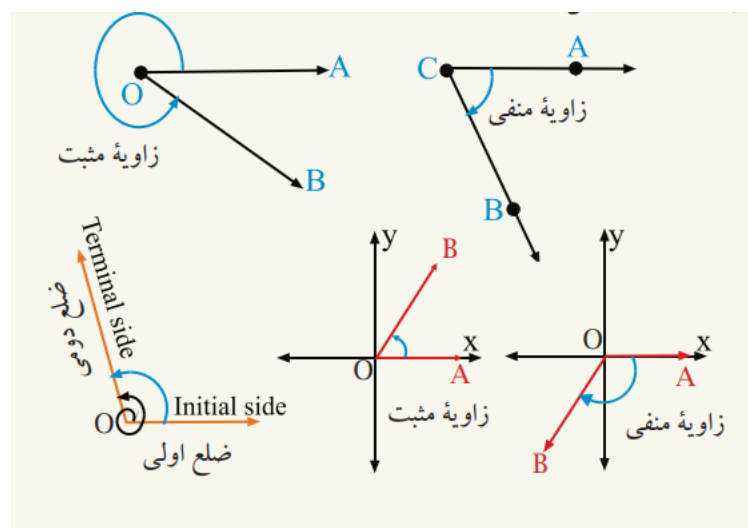


راهنمای آموزشی صنف دهم - دوره ششم

زاویه: کنج است که از تقاطع دو نیم خط بوجود آمده است، یا زاویه از دوران یک خط به حول یک نقطه ایجاد می گردد.



در مثلثات زاویه را دو نوع معرفی می نماید، زاویه که از حرکت ضلع دوار موافق عقربه ساعت به وجود آید را (زاویه منفی) و زاویه که از حرکت ضلع دوار مخالف عقربه ساعت بوجود آید را (زاویه مثبت) می نامند.



واحد های اندازه گیری زاویه

زاویه را توسط سه واحد (درجه، گراد و رادیان) اندازه می کنند.

الف. درجه: $\frac{1}{360}$ حصه از وسعت یک دایره را درجه می نامند و به حرف D و نشانه $^{\circ}$ نمایش داده می شود. مثلاً بیست درجه را به شکل $20D$ یا بیشتر به شکل 20° نشان می دهد.

واحد های کوچکتر درجه دقیقه و ثانیه است که نشانه دقیقه (') و نشانه ثانیه (") است، یعنی.

$$1^{\circ} = 60' \quad 1' = 60'' \quad 1^{\circ} = 3600''$$

مثال: $35^{\circ} 15' 27''$ را به سیستم اعشاری و $(48,3625)^{\circ}$ را به سیستم DMS بنویسید.

حل:

$$35^{\circ} 15' 27'' = 35^{\circ} + \left(\frac{15}{60}\right)^{\circ} + \left(\frac{27}{3600}\right)^{\circ} = 35^{\circ} + 0,25^{\circ} + 0,0075^{\circ} = 35,2575^{\circ}$$

$$48,3625^{\circ} = 48^{\circ} + 0,3625^{\circ} = 48^{\circ} + (0,3625 \cdot 60)' = 48^{\circ} + (21,75)' \\ = 48^{\circ} + (21)' + (0,75 \cdot 60)'' = 48^{\circ} 21' 45''$$

ب) گراد: $\frac{1}{400}$ حصه وسعت یک دایره را بنام گراد یاد می کنند. که به حرف G نشان داده می شود، واحد های کوچکتر آن دقیقه گراد و ثانیه گراد است.

$$1G = 100G' \quad 1G' = 100G''$$

ج) رادیان: عبارت از اندازه زاویه مرکزی می باشد که طول قوس مقابل آن مساوی به طول شعاع دایره باشد.

وسعت یک دایره مکمل برابر با 2π رادیان است یعنی.

$$360^{\circ} = 2\pi^R$$

تبدیل واحدهای اندازه گیری زاویه به یک دیگر

برای تبدیل واحدهای اندازه گیری زاویه به یک دیگر از رابطه عمومی ذیل استفاده می نمائیم.

$$\frac{D}{360} = \frac{G}{400} = \frac{R}{2\pi} \quad \text{یا} \quad \frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi}$$

مثال 1: اندازه 220 درجه را به رادیان تبدیل کنید.

حل 1:

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{220}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{220\pi}{180} = \frac{11\pi}{9} \Rightarrow \boxed{R = \frac{11\pi}{9}}$$

مثال 2: اندازه $\frac{5\pi}{6}$ را به گراد تبدیل کنید.

حل 2:

$$\frac{G}{200} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow G = \frac{200 \cdot \frac{5\pi}{6}}{\pi} = \frac{1000}{6} \Rightarrow \boxed{G = \frac{1000}{6}}$$

$$\sin \theta = \frac{AB}{AC} = \frac{y}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{AB}{BC} = \frac{y}{x}$$

$$\sec \theta = \frac{AC}{BC} = \frac{r}{x}$$

$$\cos \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{x}{r}$$

$$\cot \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{x}{y}$$

$$\csc \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{r}{y}$$

بعضی روابط اساسی بین نسبت های مثلثاتی زوایا

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
3. $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
4. $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$
5. $\tan x = \frac{1}{\cot x}$
6. $\sin x = \frac{1}{\csc x}$
7. $\cos x = \frac{1}{\sec x}$

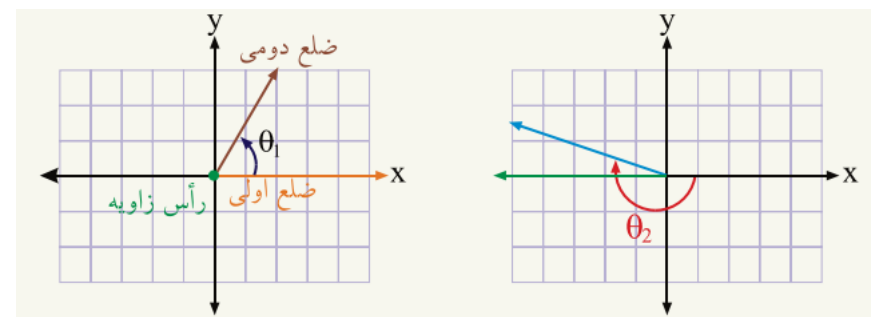
اشاره نسبت های مثلثاتی: اشاره نسبت های مثلثاتی زوایا در مختصات قایم قرار ذیل اند.

ربع	$\sin \theta, \csc \theta$	$\tan \theta, \cot \theta$	$\sec \theta, \cos \theta$
I	+	+	+
II	+	-	-
III	-	+	-
IV	-	-	+

$\sin \theta > 0$	$\sin \theta > 0$
$\cos \theta < 0$	$\cos \theta > 0$
$\tan \theta < 0$	$\tan \theta > 0$
$\cot \theta < 0$	$\cot \theta > 0$
$\sec \theta < 0$	$\sec \theta > 0$
$\csc \theta > 0$	$\csc \theta > 0$
$\sin \theta < 0$	$\sin \theta < 0$
$\cos \theta < 0$	$\cos \theta > 0$
$\tan \theta > 0$	$\tan \theta < 0$
$\cot \theta > 0$	$\cot \theta < 0$
$\sec \theta < 0$	$\sec \theta > 0$
$\csc \theta < 0$	$\csc \theta < 0$

حالت معیاری یک زاویه

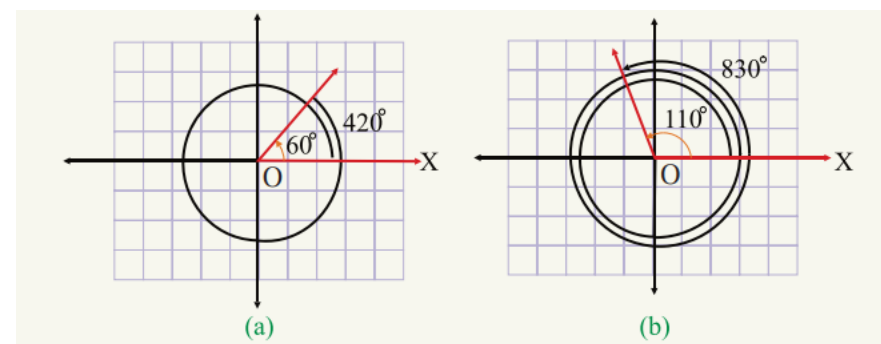
اگر راس زاویه در مبداء کمیات وضعیه و ضلع اولی زاویه بالای جهت مثبت محور X باشد این زاویه در حالت معیاری می باشد.



زاویه کوترمنل

دو یا چند زاویه که اضلاع دومی آن در حالت معیاری باهم منطبق باشند به نام زاویه های کوترمنل یاد می شود.

مثال: در اشکال ذیل دیده می شوند که اضلاع دومی زاویه های 110 و 830 و در شکل دیگر 60 و 420 باهم منطبق اند. پس گفته می توانیم که زاویه 110 با 830 کوترمنل است، همچنان زاویه 60 با زاویه 420 نیز کوترمنل است.



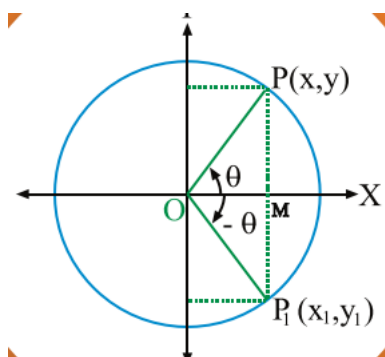
توابع مثلثاتی:

نسبت های مثلثاتی که از تقسیم اضلاع مقابل، مجاور و وتر بر یکدیگر بدست می آید بنام توابع مثلثاتی نامیده می شود که در مجموع شش نوع اند. که عبارت اند از سین زاویه، کوسین زاویه، تانجانت زاویه، کوتانجانت زاویه، سیکینت زاویه و کوسیکینت زاویه.

ارتباط بین نسبت های مثلثاتی یک زاویه حاده با زاویه های دیگر

رابطه بین نسبت های مثلثاتی زوایای θ و $-\theta$

زاویه حاده مثبت به اندازه θ مخالف عقربه ساعت و زاویه برابر انداده اند از θ - موافق عقربه ساعت ترسیم می کنیم و مطابق آن نسبت های مثلثاتی آنها را دریافت می نمایم



$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$

$$\cotan(-\theta) = -\cotan\theta$$

$$\sec(-\theta) = \sec\theta$$

$$\csc(-\theta) = -\csc\theta$$

مثال: نسبت های مثلثاتی زاویه (-30°) را تعیین کنید.

حل:

$$\sin(-30) = -\sin 30 = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(-30) = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(-30) = -\tan(30) = -\sqrt{3}$$

$$\cotan(-30) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

ارتباط بین نسبت های مثلثات دو زاویه که مجموعه و فرق آنها 180° گردد.

$$\sin(180 - \theta) = \sin\theta$$

$$\cos(180 - \theta) = -\cos\theta$$

$$\tan(180 - \theta) = -\tan\theta$$

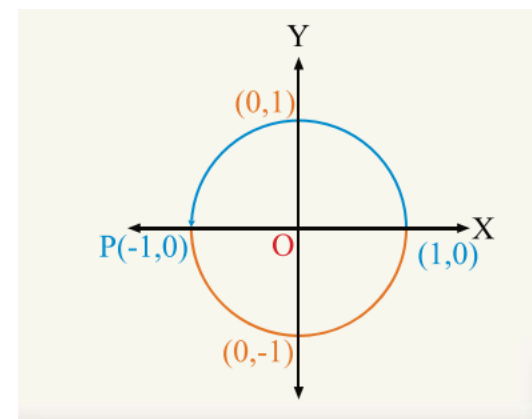
$$\cotan(180 - \theta) = -\cotan\theta$$

$$\sec(180 - \theta) = -\sec\theta$$

$$\csc(180 - \theta) = \csc\theta$$

نسبت های مثلثاتی زاویه های $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ و 360°

برای دریافت نسبت های مثلثاتی زاویه های فوق دایره مثلثاتی با شعاع $r = 1 \text{ unit}$ را در نظر می گیریم و در نظر داشت نقاط $(1,0)$ ، $(0,1)$ ، $(-1,0)$ و $(0,-1)$ می توان نسبت های مثلثاتی آنها را دریافت نمود.



$$\sin 0 = 0 \quad \cos 0 = 1 \quad \tan 0 = 0 \quad \cotan 0 = \infty \quad \sec 0 = \infty \quad \csc 0 = 1$$

نسبت های مثلثاتی زاویه 90°

$$\sin 90 = 1, \cos 90 = 0 \quad \tan 90 = \infty, \cotan 90 = 1, \sec 90 = \infty, \csc 90 = 1$$

نسبت های مثلثاتی زاویه 180°

$$\sin 180 = 0, \cos 180 = -1, \tan 180 = 0, \cotan 180 = -\infty$$

$$\sec 180 = -1, \csc 180 = \infty$$

نسبت های مثلثاتی زاویه 270°

$$\sin 270^\circ = -1, \cos 270 = 0 \quad \tan 270 = -\infty$$

$$\cotan 270 = 0, \sec 270 = \infty \quad \csc 270 = -1$$

نسبت های مثلثاتی زاویه 360°

زاویه 360 درجه با زاویه صفر درجه کوترمنل است بناً نسبت های مثلثاتی آن نیز برابر با نسبت های صفر است.

ارتباط بین نسبت های مثلثاتی دو زاویه که فرق شان 180 درجه گردد.

$$\sin(180 + \theta) = -\sin\theta \quad \cos(180 + \theta) = -\cos\theta$$

$$\tan(180 + \theta) = \tan\theta \quad \cotan(180 + \theta) = \cotan\theta$$

$$\sec(180 + \theta) = -\sec\theta \quad \csc(180 + \theta) = -\csc\theta$$

نسبت های مثلثاتی دو زاویه که مجموعه شان 90° گردد.

$$\sin(90 - \theta) = \cos\theta \quad \cos(90 - \theta) = \sin\theta$$

$$\tan(90 - \theta) = \cotan\theta \quad \cotan(90 - \theta) = \tan\theta$$

$$\sec(90 - \theta) = \csc\theta \quad \csc(90 - \theta) = \sec\theta$$

نسبت های مثلثاتی دو زاویه که فرق شان 90° گردد.

$$\sin(90 + \theta) = \cos\theta \quad \cos(90 - \theta) = -\sin\theta$$

$$\tan(90 - \theta) = -\cotan\theta \quad \cotan(90 - \theta) = -\tan\theta$$

$$\sec(90 - \theta) = -\csc\theta \quad \csc(90 - \theta) = \sec\theta$$

فعالیت ها:

1. زاویه چیست؟ و چند نوع می باشد.
2. واحد های اندازه گیری زاویه را به ترتیب تشریح کنید.
3. 25° درجه را به گراد و رادیان تبدیل نمائید.
4. $\frac{3\pi}{7}$ رادیان را به درجه و گراد تبدیل نمائید.
5. نسبت های مثلثاتی زاویه 240 را دریافت نمائید.
6. نسبت های مثلثاتی زاویه (40-) را دریافت نمائید.
7. نسبت های مثلثاتی زاویه 270 را تعیین کنید.