

$$f(x) + g(x) = x^2 - 3 + 4x + 5 = x^2 + 4x + 2$$

$$(f + g)(-2) = (-2)^2 + 4(-2) + 2 = 4 - 8 + 2 = -2$$

فعالیت: اگر $f(x) = x - 5$ و $g(x) = x^2 - 2$ باشند. حاصل جمع، حاصل تفریق، حاصل ضرب و حاصل تقسیم آنها را دریابید.

تمرین: عملیه های اساسی را بالای توابع ذیل انجام دهید.

$$1) \begin{cases} f(x) = \sqrt{4-x} \\ g(x) = \sqrt{3+x} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} f(x) = 5x - 2 \\ g(x) = 3x^2 \end{cases}$$

عنوان 2: ترکیب توابع

صفحه: 107

اهداف آموزشی: دریایان این درس شاگردان.

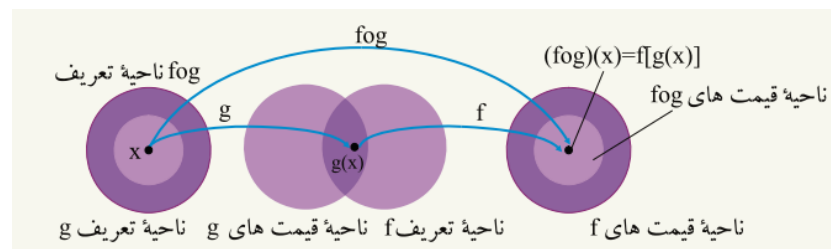
- بتوانند توابع را باهم ترکیب نمایند.
- ترکیب دوگانه و سه گانه را انجام داده بتوانند.
- سوالات مربوط به ترکیب توابع را حل کرده بتوانند.

تعریف: هرگاه معادله یک تابع قسماً بجای محتول تابع دیگر وضع گردد، این عملیه را ترکیب توابع می نامند. ویا به عبارت دیگر

اگر f و g توابع از متحول x باشند، ترکیب توابع f و g را به شکل $f \circ g = f(g(x))$ را نشان می دهد.

ناحیه تعریف $(f \circ g)(x)$ عبارت از x است که در ناحیه تعریف تابع $g(x)$ باشد و $g(x)$ در ناحیه تعریف f باشد. یعنی

$$(f \circ g): D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_g \text{ and } g(x) \in D_f\}$$



عنوان 1: عملیه های توابع

صفحه: 103 الی 132

اهداف آموزشی:

- شاگردان در ختم این درس بتوانند ترکیب توابع را بفهمند.
- شاگردان به فورمول ها و روش های حل سوالات پیرامون درس آشنا گردند.

عملیه های چهارگانه بالای توابع صدق می کند. این چهار عملیه به ترتیب قرار ذیل ارائه می شود.

$$f(x) \pm g(x) = (f \pm g)(x) \quad : \quad D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$$

$$f(x) \times g(x) = (f \times g)(x) \quad : \quad D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

$$f(x) \div g(x) = (f \div g)(x) \quad : \quad D_{f \div g} = D_f \cap D_g, \{x / g \neq 0\}$$

مثال اول: عملیه های اساسی را بالا توابع $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = x^2 - 4$ انجام دهید.

حل: برای انجام عملیه های اساسی بالای توابع معالات آنها را جمع، تفریق، ضرب و تقسیم می کنیم.

$$f(x) = 2x + 1, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = x^2 - 4, \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$1. f(x) + g(x) = x^2 - 4 + 2x + 1 = x^2 + 2x - 3 \quad D_{f+g} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$2. f(x) - g(x) = 2x + 1 - (x^2 - 4) = -x^2 + 2x + 5 \quad D_{f-g} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$3. f(x) \times g(x) = (x^2 - 4)(2x + 1) = 2x^3 + x^2 - 4x - 4$$

$$D_{f \times g} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$4. f(x) \div g(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - 4} \quad D_{f/g} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} - \{2, -2\}$$

مثال دوم: اگر توابع $f(x) = x^2 - 3$ و $g(x) = 4x + 5$ باشد، $(f + g)(-2)$ را دریافت نمائید.

حل: ابتدا توابع فوق را جمع می کنیم و بعداً قیمت داده شده متحول $(x = -2)$ را در حاصل جمع آنها وضع می نمائیم.

اهداف آموزشی: درختم این درس شاگردان قادر گردد تا

- مفهوم تابع معکوس را بدانند
- تابع معکوس یک تابع را دریافت کرده بتوانند
- سوالات مربوط به تابع معکوس را حل کرده بتوانند.

تعریف: اگر در یک تابع جاهای ناحیه تعریف و ناحیه قیمت آنها باهم تبدیل گردد یک تابع جدید بوجود می آید که بنام تابع معکوس تابع اول نامیده می شود.

مثال اول: اگر $f := \{(2,4), (x, 3), (a, b), (m, n)\}$ یک تابع باشد درین صورت

$$f^{-1} = \{(4,2), (3,x), (b,a), (n,m)\}$$

در تابع معکوس رابطه ذیل وجود دارد.

$$D_f = R_{f^{-1}} \quad \text{and} \quad D_{f^{-1}} = R_f$$

نکته: تنها توابع یک به یک معکوس پذیر اند.

تابع یک به یک

تعریف: تابع $f(x)$ یک به یک است اگر برای $x_1 \neq x_2$ نتیجه شود که $f(x_1) \neq f(x_2)$ است،

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

مثال: کدام یکی از توابع $f(x) = -4x + 12$ و $g(x) = \sqrt{25 - x^2}$ یک به یک است؟

حل: برای دانستن یک به یک بودن تابع دو قیمت اختیاری مختلف در تابع وضع می کنیم، اگر نتیجه مختلف حاصل شد تابع یک به است و اگر نتیجه مشابه حاصل شد تابع یک به یک نیست.

$$f(x) = -4x + 1 : -2 \neq 2 \Rightarrow \begin{cases} f(-2) = 20 \\ f(2) = 4 \end{cases} \Rightarrow f(-2) \neq f(2)$$

تابع فوق شرط یک به یک بودن را صدق نمود، پس یک به یک است.

$$g(x) = \sqrt{25 - x^2} : -2 \neq 2 \Rightarrow \begin{cases} f(-2) = \sqrt{21} \\ f(2) = \sqrt{21} \end{cases} \Rightarrow f(-2) = f(2)$$

تابع $g(x)$ شرط یک به یک بودن را صدق نمی کند، پس یک به یک نیست.

تشخیص تابع یک به یک از روی گراف

مثال اول: اگر $f(x) = 3x - 4$ و $g(x) = x^2 + 6$ باشد درین صورت (fog) و (gof) را دریافت کنید.

حل: برای ترکیب یک تابع معادله همان تابع را قسماً بجای متحول تابع دیگر قرار می دهیم.

$$(gof)(x) = g(f(x)) = (3x - 4)^2 + 6 = 9x^2 - 24x + 22$$

ناحیه تعریف ترکیب توابع فوق تمام اعداد حقیقی اند.

مثال دوم: اگر $g(x) = 1 - x$ و $f(x) = \sqrt{x}$ را ترکیب و ناحیه تعریف ترکیب آنها را دریافت کنید.

حل:

$$f(x) = \sqrt{x} : D_f = [0, +\infty)$$

$$g(x) = 1 - x : D_g = (-\infty, +\infty)$$

$$fog = f(g(x)) = \sqrt{1 - x} : D_{fog} = \{x : x \in \mathbb{R}, 1 - x \geq 0 = (-\infty, 1]\}$$

$$gof = g(f(x)) = 1 - \sqrt{x} : D_{gof} = \{x : x \in \mathbb{R}, x \in D_f \text{ and } f(x) \in D_g\}$$

$$\{x : x \geq 0, \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = [0, \infty)$$

تمرین: توابع ذیل را ترکیب کنید.

$$1) f(x) = 3x, \quad g(x) = \frac{3}{x}$$

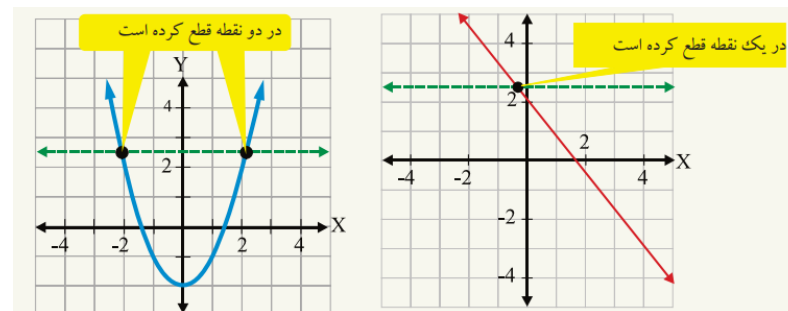
$$2) f(x) = 2x^2 - 3x, \quad g(x) = x - 2$$

$$3) f(x) = \frac{3x}{x - 4}, \quad g(x) = 5x$$

عنوان 3: تابع معکوس

صفحه: 111

اگر یک خط افقی موازی با محور x گراف تابع را در یک نقطه قطع کند، تابع یک به یک است و اگر در بیشتر از یک نقطه قطع کند. تابع یک به یک نیست.



دریافت تابع معکوس یک تابع

برای دریافت تابع معکوس یک تابع جاهای x و y را تبدیل نموده دوباره قیمت y را از جنس x دریافت می کنیم، حاصل عملیه تابع معکوس تابع اول است.

مثال: تابع معکوس تابع $y = 3x + 2$ را دریابید.

حل: جاهای x و y را تبدیل می کنیم.

$$y = 3x + 2 \Rightarrow x = 3y + 2$$

$$x - 2 = 3y : \div (3) \Rightarrow y = \frac{x - 2}{3} = f^{(-1)}(x)$$

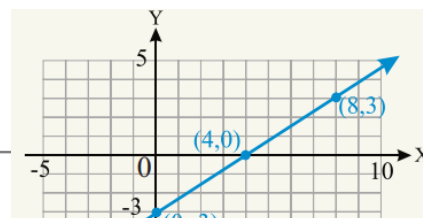
عنوان 4: تابع پولینومی

تابع خطی: عبارت از تابع است که گراف آن یک خط مستقیم باشد. و معادله آن عبارت اند از.

معادله تابع خطی عبارت اند از. $y = ax + b$ و گراف آن یک خط مستقیم است.

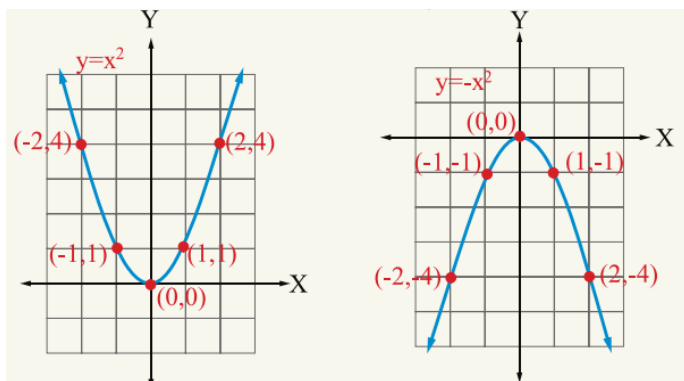
مثال: معادله تابع $y = \frac{3}{4}x - 3$ را در نظر گرفته جزئیات و معادلات آنرا رسم کنید.

حل: در تابع خطی ضریب x همیشه بنام میل خط مستقیم و عدد ثابت بنام نقطه تقاطع با محور y گفته می شود.



تابع درجه دوم و گراف آن

تابع درجه دوم عبارت از تابع اند که توان متحول آن عدد 2 بوده و گراف آن یک پارابول باشد. که به شکل ذیل ترسیم می گردد.



مثال: گراف تابع $y = x^2 - 4x + 4$ را ترسیم کنید.

حل: برای ترسیم گراف قرار ذیل عمل می کنیم.

- در یک جدول برای x قیمت میدهم و برای y قیمت دریافت می گردد.
 - تقاطع با محورات را دریافت می کنیم طوری که برای تقاطع با x قرار میدهم $y = 0$ و برای تقاطع با y قرار میدهم $x = 0$.
 - کمیات وضعیه راس پارابول را تعیین می کنیم. فرمول تعیین راس پارابول عبارت اند از.
- $$v = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$$
- دهن پارابول را تعیین می کنیم طوری که در اصل معادله اگر $a > 0$ دهن پارابول به طرف پائین است و دارای نقطه اضغری می باشد و اگر $a < 0$ باشد دهن پارابول به طرف بالا بوده و دارای نقطه اعظمی می باشد.

