

راهنمای آموزشی صنف یازدهم – دوره ششم

عنوان 1: ترادف ها

اهداف آموزشی

- ❖ دریایان این درس شاگردان به مفهوم ترادف آشنا گردد.
- ❖ شاگردان بتوانند ترادف را تعریف و مثال از آن کار نمایند.
- ❖ شاگردان به روش های حل مثال های کنکوری آشنا شوند.

تعریف 1: ترادف عبارت از ردیف اعداد، اشیا و قیمت های اند که اصل ترتیب در آن رعایت شده باشد.

مثال: ترتیب صنف های مکتب، ترتیب سن بین اولادهای یک فامیل... نمونه های از ترادف اند.

تعریف 2: ترادف عبارت از تابع است که ناحیه تعریف آن اعداد طبیعی و ناحیه قیمت آن اعداد حقیقی باشد.

$$a_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

طریق ارائه ترادف: هر ترادف به اساس ترتیب ذیل نوشته می شود.

$$a_n: a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ \dots \ a_n$$

رابطه فوق بنام فورمول ترادف نیز یاد می شود. که هر کدام آنها را حد ترادف و تمام آنها را حدود ترادف ها می نامند. حدود یک ترادف بر اساس حد عمومی a_n تعریف و دریافت می شود.

مثال: شکل انکشافی ترادف $a_n = \frac{n+1}{n}$ را بنویسید.

حل: در ترادف فوق بجای n اعداد طبیعی را قیمت می دهیم و شکل انکشافی ترادف دریافت می گردد.

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1+1}{1} = 2$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\text{شکل عمومی ترادف} \quad 2 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{6}{5} \quad \frac{7}{6} \quad \dots \quad \frac{n+1}{n}$$

نکته: اگر حدود یک ترادف معین باشد آنرا ترادف محدود و اگر حدود یک ترادف معلوم نباشد، آنرا ترادف نامحدود می نامند.

تزايد و تناقص ترادف ها

اگر حدود یک ترادف به ترتیب ازدیاد یابد ترادف را متزايد می نامند و اگر حدود آن به ترتیب کاهش یابد آنرا ترادف متناقص می نامند.

ترادف متزايد ... 12 10 8 6 4 2

ترادف متناقص ... -9 -6 -3 0 3

مثال: اگر حد عمومی یک ترادف $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ باشد، 5 حد ترادف را دریافت نمایید.

حل: از تعریف ترادف ها استفاده نموده قیمت گذاری می نمائیم.

$$n = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$a_n: \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \frac{25}{6}$$

انواع ترادف: ترادف ها به صورت عموم دو نوع اند.

الف) ترادف حسابی

اگر رابطه بین حدود متعاقب یک ترادف بر اساس جمع و تفریق باشد، ترادف را حسابی می نامند. که همان رابطه بین حدود متعاقب همیشه یک عدد ثابت اند که آنرا تفاضل مشترک (فرق مشترک) می نامند و به حرف d نشان میدهد.

در ترادف حسابی تزايد و تناقص نظر به d تعیین می گردد، یعنی اگر $d > 0$ باشد، ترادف متزايد و اگر $d < 0$ باشد ترادف متناقص است.

مثال: ترادف ... 18 15 11 8 5 2 چگونه یک ترادف اند.

حل: در ترادف فوق $d = 3$ اند و $3 > 0$ می باشد، پس ترادف حسابی فوق متزايد است.

دریافت حد n - ام در یک ترادف حسابی

حد n - ام را که حد دلخواه نیز می نامند عبارت از حد ترادف است که حدود ترادف را تعیین می کند.

حد دلخواه در ترادف قرار ذیل دریافت می گردد.

حد اول	حد دوم	حد سوم	حد چهارم	حد n -ام
a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	$a+(n-1)d$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
a_1	a_2	a_3	a_4	a_n

در نتیجه بین a_1, d, n و a_n رابطه $a_n = a_1 + (n-1)d$ برقرار است.

یعنی حد دلخواه در ترادف حسابی عبارت اند از

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

مثال: حد 30 - ام ترادف حسابی ... 12, 5, -2 را دریافت نمائید.

حل: با استفاده از فورمول عمومی ترادف می توان قرار ذیل حد 30 - ام ترادف را دریافت نمود.

$$a_1 = -2$$

$$d = 7$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$n = 30$$

$$a_{30} = -2 + (30-1)7$$

$$a_{30} = ?$$

$$a_{30} = -2 + 29 \cdot 7 = -2 + 203 \Rightarrow \boxed{a_{30} = 201}$$

فعالیت 1: تعداد حدود ترادف حسابی 2000, ..., 45, 40, 35 چند است؟ دریافت نمائید.

فعالیت 2: حد اول یک ترادف حسابی 3 و حد دهم آن 10 است، فرق مشترک ترادف را دریافت نمائید.

رهنمود: از فورمول عمومی دریافت حد دلخواه ترادف استفاده شود.

اوسط حسابی

اگر سه حد یک ترادف حسابی به ترتیب به شکل a_{n-1} , a_n , a_{n+1} باشد، اوسط حسابی از رابطه ذیل دریافت می گردد.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

مثال: اوسط حسابی اعداد 7 و 23 را دریافت نمائید.

حل: با استفاده از فورمول اوسط حسابی داریم که

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{7 + 23}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

نکته: اگر دو حد معین a_m و a_n یک ترادف حسابی معلوم باشد، می تواند تفاضل مشترک آنها با استفاده از فورمول ذیل دریافت نمود.

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad a_m = a_1 + (m-1)d$$

$$a_n - a_m = nd - md = d(n-m)$$

$$d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$$

مثال: حد پنج یک ترادف 27 و حد نهم آن 47 است، تفاضل مشترک ترادف را دریافت نمائید.

حل: با استفاده از فورمول بالا داریم که

$$d = \frac{a_n - a_m}{n - m} = \frac{47 - 27}{9 - 5} = \frac{20}{4} = 5$$

ترادف هارمونیک

معکوس ترادف حسابی را ترادف هارمونیک می نامند. یعنی اگر a_n یک ترادف حسابی باشد، $\frac{1}{a_n}$ یک ترادف هارمونیک است.

مثال: ترادف هارمونیک ترادف حسابی ... 24, 17, 10, 3 را بنویسید.

حل:

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}, \frac{1}{24} \dots$$

اوسط هارمونیک: اگر سه حد یک ترادف هارمونیک a_{n-1} , a_n , a_{n+1} حدود یک ترادف حسابی و $\frac{1}{a_{n-1}}$, $\frac{1}{a_n}$, $\frac{1}{a_{n+1}}$ حدود یک ترادف هارمونیک باشد، اوسط هارمونیک از رابطه ذیل دریافت می گردد.

$$a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1} + a_{n+1}}$$

ب) ترادف هندسی

اگر رابطه بین حدود یک ترادف بر اساس ضرب و تقسیم باشد، ترادف را هندسی می‌نامند. که همین ارتباط همیشه یک عدد ثابت اند و از حاصل تقسیم حدود متعاقب ترادف بدست می‌آید می‌آید آنرا نسبت مشترک می‌نامند و به حرف r و گاهی به حرف q نشان می‌دهد.

تزیاید و تناقص در ترادف هندسی نیز بر اساس قیمت r تعیین می‌گردد، یعنی اگر $r > 1$ باشد، ترادف متزیاید و اگر $r < 1$ باشد ترادف متناقص می‌نامند. اما اگر $r = 1$ باشد ترادف ثابت اند.

ترادف متزیاید ... 32 , 16 , 8 , 4 , 2

ترادف متناقص ... $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{3}$, 1

ترادف ثابت ... 5 , 5 , 5 , 5

دریافت حد n - ام در ترادف هندسی

اگر a حد اول و r نسبت مشترک و n تعداد حدود یک ترادف هندسی باشد، حد n -ام یا دلخواه از رابطه ذیل دریافت می‌گردد.

حد n -ام	حد پنجم	حد چهارم	حد سوم	حد دوم	حد اول
aq^{n-1}	aq^4	aq^3	aq^2	aq	a_1
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
a_n	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1

یعنی فورمول حد دلخواه یا n -ام عبارت اند از.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

مثال: حد ششم ترادف ... , -10 , 5 را دریافت نمایید.

حل:

$$a_1 = 5$$

$$r = -2 \quad a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_6 = 5 \cdot (-2)^5 \Rightarrow a_6 = 5 \cdot (-32)$$

$$n = 6$$

$$a_6 = -160$$

اوسط هندسی

اگر دو حد یک ترادف هندسی معلوم باشد اوسط هندسی آن قرار ذیل دریافت می‌گردد.

$$a_n = \sqrt{(a_{n-1}) \cdot (a_{n+1})}$$

مثال: اوسط هندسی اعداد 3 و 12 را دریافت نمایید.

حل: با استفاده از فورمول اوسط هندسی داریم که.

$$\bar{x}_G = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$$

فعالیت ها:

1. 5 حد اول ترادف هندسی را بنویسید که حد اول آن 5 و حد اخیر آن $\frac{5}{16}$ باشد.

2. حد دوازدهم ترادف هندسی ... , 2 , 4 , 8 را دریافت نمایید.

3. اوسط هندسی اعداد $\sqrt{3}$ و $\frac{\sqrt{3}}{4}$ را دریافت نمایید.

مجموعه قسمی ترادف ها

برای دریافت مجموعه قسمی یک ترادف، حدود ترادف را به ترتیب جمع می‌کنیم. مجموعه قسمی ترادف ها را به حرف S نشان می‌دهد.

اگر $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$ یک ترادف باشد، مجموعه قسمی آن قرار ذیل ارائه می‌شود.

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

در مجموعه های قسمی جهت اختصار از سمبول سیگما استفاده می‌شود که دارای اندکس بالای، اندکس پائینی و فورمول تحت سیگما است.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{k=1}^n a_k$$

مثال: $\sum_{i=1}^7 \frac{1}{i}$ را به شکل انکشاف یافته آن بنویسید.

حل: با در نظر داشت فورمول تحت سیگما و اندکس ها می‌توان قرار ذیل نوشت.

$$\sum_{i=1}^7 \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{13068}{5040}$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

مثال: در یک ترادف هندسی حد اول برابر 2 و نسبت مشترک آن برابر با $r = \frac{1}{2}$ است، مجموعه 5 حد اول آنرا دریافت نمائید.

حل:

$$a_1 = 2 \quad r = \frac{1}{2} \quad n = 5 \quad S_5 = ?$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2\left(\frac{31}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{31}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{31}{8}$$

$$S_5 = \frac{31}{8}$$

فعالیت ها:

1. سلسله های هندسی متباعد چیست؟ با ذکر مثال تشریح کنید.
2. سلسله هندسی متباعد چیست؟ با ذکر مثال تشریح کنید.
3. اگر حد اول یک سلسله هندسی 5 و نسبت مشترک آن $\frac{1}{3}$ باشد، مجموعه 7 حد اول آن را دریافت نمائید.
4. اگر حد اول یک ترادف هندسی 3 و مجموع 6 حد آن 3320 باشد، نسبت مشترک سلسله هندسی را دریافت نمائید.

مجموعه قسمی n حد اول ترادف حسابی

اگر حدود یک ترادف حسابی را جمع کنیم به آن را سلسله حسابی می نامند که سلسله هاس حسابی دو نوع اند، اگر تعداد حدود مشخص باشد آنرا سلسله حسابی محدود و اگر تعداد حدود نا مشخص باشند آنرا سلسله حسابی نامحدود می نامند. یعنی

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i \quad \text{سلسله محدود}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \quad \text{سلسله نامحدود}$$

سلسله محدود حسابی را مجموعه قسمی نیز می نامند و مجموعه قسمی n حد یک ترادف که به S_n نشان داده می شود از رابطه ذیل بدست می آید.

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

مثال: مجموعه 201 حد اول ترادف حسابی $7, 11, 15, \dots$ را دریافت نمائید.

حل:

$$a_1 = 7 \quad d = 4 \quad n = 201 \quad S_n = ?$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] = \frac{201}{2} [2 \cdot 7 + (201-1)4] = \frac{201}{2} [14 + 800]$$

$$S_{201} = \frac{201}{2} [814] = 81807$$

فعالیت ها:

1. حاصل جمع 200 حد ترادف اعداد جفت را دریابید.
2. حاصل جمع 210 حد اول ترادف اعداد تاق را دریابید.
3. مجموعه قسمی 12 حد اول ترادف حسابی $2, 5, 8, 11, \dots$ را دریابید.

مجموعه قسمی n حد اول یک ترادف هندسی

اگر حدود یک ترادف هندسی را باهم جمع نمائیم آنرا سلسله هندسی می نامند.

مجموعه قسمی n حد اول یک ترادف هندسی از رابطه ذیل بدست می آید.