

راهنمایی آموزشی صنف دوازدهم - دوره هفتم

عنوان: گراف تابع یک مجهوله درجه سوم

اهداف آموزشی: در پایان این درس شاگردان:

- گراف توابع درجه سوم را ترسیم کرده بتوانند.
- تحولات تابع درجه سوم را بررسی کرده بتوانند.
- قادر گردد تا سوالات مرتبط به موضوع را حل کند.
- قضیه رول را درست درک و مطابق آن مثال کار بتوانند.
- قضیه لاگرانژ را درک و با در نظر داشت آن مثال تطبیق بتوانند.
- قاعده هویتل را درست درک نموده و مطابق آن مثال کار کند.
- نقاط بحرانی توابع را تطبیق کرده بتوانند.

توابع درجه اول سه مجهوله عبارت از توابع اند که شکل $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ را دارد. برای ترسیم گراف آن حالات ذیل را در نظر می گیریم.

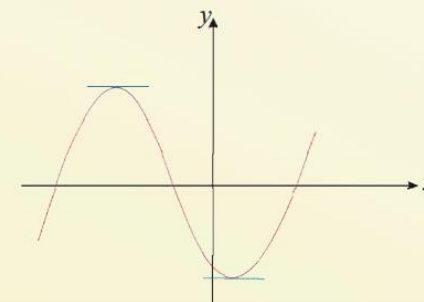
1. اگر در تابع درجه سوم $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ عدد $a > 0$ باشد، با گرفتن مشتق اول این تابع به یک تابع درجه دوم تبدیل می گردد، اگر در آن $\Delta f' > 0$ باشد، مشتق تابع دارای دو حل است. که از راست به چپ اول اعظمی و بعد اصغری دارد.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$a > 0 \Rightarrow \Delta f' > 0$$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$



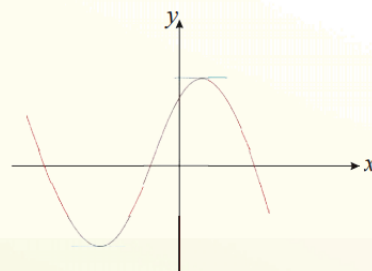
2. اگر در تابع درجه سوم $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ عدد $a < 0$ باشد، با گرفتن مشتق اول، این تابع به یک تابع درجه دوم تبدیل می گردد، اگر $\Delta f' > 0$ باشد، معادله مشتق دارای دو حل است، که از راست به چپ یک اصغری و یک اعظمی دارد.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$a < 0 \Rightarrow \Delta f' > 0$$

x	x_1		x_2		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$+\infty$	



3. اگر منحنی تابع درجه سوم مختصات نسبی داشته باشد، مختصات نقطه انعطاف آن عبارت اند از

$$I(x_c, y_c) = \left(\frac{x_{max} + x_{min}}{2}, \frac{y_{max} + y_{min}}{2} \right)$$

4. نقطه تناظر تابع درجه سوم عبارت اند از $x = -\frac{b}{3a}$.

مثال: تحولات تابع $f(x) = -x^3 + 3x^2$ تحقیق و گراف آنرا ترسیم کنید.

حل: ابتداء مشتق اول تابع را دریافت نموده نقاط اعظمی و اصغری تابع را تعیین می کنیم.

$$f(x) = -x^3 + 3x^2$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 6x = 0$$

$$-3x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \rightarrow \text{اصغری}(0,0) \\ x = 2 & \rightarrow \text{اعظمی}(2,4) \end{cases}$$

برای دریافت نقاط انعطاف مشتق دوم را دریافت نموده مساوی به صفر قرار میدهیم.

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 \rightarrow f'(x) = -3x^2 + 6x \rightarrow f''(x) = -6x + 6$$

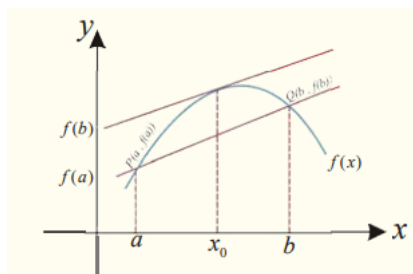
$$f''(x) = 0 \Rightarrow -6x + 6 = 0 \Rightarrow -6x = -6 \Rightarrow x = 1 \rightarrow \text{انعطاف}(1,2)$$

اکنون با در نظر داشت موارد فوق و با در نظر گرفتن جدول تعیین اشاره گراف آنرا ترسیم می کنیم.

$$f'(x) = (\cos x)' = -\sin x = 0 \Rightarrow x = 2\pi, 3\pi, 4\pi$$

قضیه لاگرانژ

قضیه: اگر تابع $f(x)$ در انتروال $[a, b]$ متمادی و مشتق پذیر باشد در همین انتروال (a, b) یک عدد مانند c وجود دارد که طوریکه $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ است.



مثال: در تابع $f(x) = 2x^3 - 8x + 1$ قضیه قیمت متوسط را در انتروال $[1, 3]$ بررسی کنید.

حل: دیده می شود که تابع فوق در انتروال $[1, 3]$ متمادی و مشتق پذیر است.

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{36}{2} = 18 \dots \dots (1)$$

$$f(x) = 2x^3 - 8x + 1 \Rightarrow f'(x_0) = 6x^2 - 8 \dots \dots \dots (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \text{ and } (2)} 6x^2 - 8 = 18 \Rightarrow x^2 = 26 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{26}{6}}$$

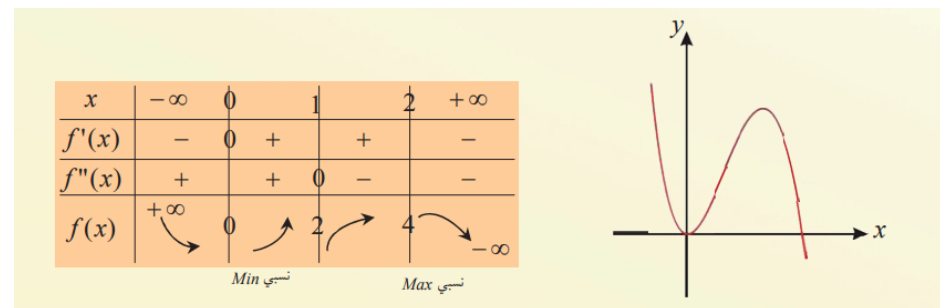
$$\Rightarrow x_0 = c = \sqrt{\frac{26}{6}} = \sqrt{\frac{13}{3}}$$

قاعده هسپتال:

قاعده: اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ در انتروال (a, b) تعریف و مشتق پذیر باشد، هرگاه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$

شکل مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ را اختیار کند، درین صورت جهت دریافت لیمیت از آن مشتق می گیریم و مشتق می گیریم تا تابع ساده گردد و ابهام رفع شود.

مثال 1: لیمیت $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 2x}{x - \sin 2x}$ را حل کنید.

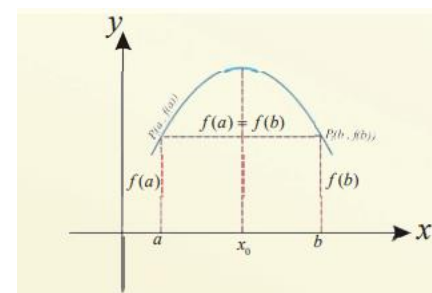


فعالیت ها:

- گراف تابع درجه سوم $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ را ترسیم کنید.
- مرکز تناظر تابع $y = 3x^3 - 4x + 3$ را تعیین کنید.
- تحولات تابع $f(x) = -(x - 1)^3$ را بررسی نموده گراف آنرا ترسیم کنید.

قضیه رول

قضیه: اگر تابع $f(x)$ در انتروال $a \leq x \leq b$ متمادی و در انتروال $a < x < b$ مشتق پذیر باشد هرگاه $f(a) = f(b)$ شود، کم از کم یک نقطه x_0 در انتروال $a < x < b$ وجود دارد که در آن $f'(x) = 0$ می شود. به گراف ذیل توجه کنید.



مثال: قضیه رول را در تابع $f(x) = \cos x$ در انتروال $[\pi, 5\pi]$ تطبیق کنید.

حل: حدود انتروال را در تابع قیمت گذاری می کنیم تا دیده شود که قضیه رول درین انتروال درست یا خیر،

$$f(\pi) = \cos \pi = -1$$

$$f(5\pi) = \cos 5\pi = -1$$

$$\Rightarrow f(\pi) = f(5\pi) \text{ است}$$

اکنون برای دریافت نقطه x_0 مشتق اول تابع را دریافت نموده و آنرا برابر با صفر قرار میدهم.

$$V = x^2 \cdot y \Rightarrow V = x^2(24 - 2x) = 24x^2 - 2x^3$$

$$V = 24x^2 - 2x^3$$

$$V'(x) = 48x - 6x^2$$

$$V'(x) = 0$$

$$48x - 6x^2 = 0$$

$$x(48 - 6x) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$48 - 6x = 0$$

$$-6x = -48$$

$$x = 8$$

$$V(0) = 24 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3$$

$$= 0 - 0 = 0$$

$$V'(0) = 0$$

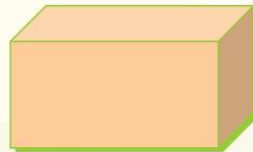
$$V(8) = 24 \cdot (8)^2 - 2 \cdot (8)^3$$

$$= 1536 - 1024 = 512$$

$$V(8) = 512$$

$$V(12) = 24 \cdot (12)^2 - 2 \cdot (12)^3 = 3456 - 3456 = 0$$

$$V(12) = 0$$



بنابر آن بزرگترین حجم مکعب مستطیل 512 cm^3 است.

فعالیت ها

- قضیه رول را در تابع $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ در انتروال $(-2, 2)$ بررسی کنید.
- اگر مجموع دو عدد 200 شود آنرا طوری تعیین کنید که مجموع مربعات شان اصغری شود.
- نسبت متوسط بین حجم و مساحت کره را دریافت کنید.
- با استفاده از قاعده هویٹال لیمیت $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$ را دریافت کنید.
- در مورد استفاده از بررسی نقاط بحرانی توابع در زندگی روزمره بنویسید.

حل 1: با وضع عامل تقرب بجای متحول دیده می شود که تابع شکل مبهم $\frac{0}{0}$ می گیرد، برای دریافت لیمیت و رفع شکل ابهام از صورت و مخرج همزمان مشتق می گیریم.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 2x}{x - \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \sin 2x)'}{(x - \sin 2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \sin x \cos x}{1 - 2 \sin x \cos x} = \frac{1 + 2}{1 - 2} = -3$$

مثال 2: لیمیت $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 6}{7x^2 - 2x + 1}$ را دریابید.

حل 2: با استفاده از قاعده هویٹال داریم که.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 6}{7x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^2 - 4x + 6)'}{(7x^2 - 2x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(6x - 4)'}{(14x - 2)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{14} = \frac{6}{14}$$

تطبیق نقاط بحرانی

برای تطبیق نقاط بحرانی توابع مثال های ذیل را در نظر میگیریم.

مثال 1: دو عددی را دریابید که حاصل جمع شان 20 و حاصل ضرب شان بزرگترین قیمت ممکنه را داشته باشد.

حل 1: اگر عدد اولی x باشد پس عدد دومی $20 - x$ است، و حاصل ضرب آنها را به شکل تابع این طور می نویسیم $f(x) = x(20 - x)$ چون عدد x در انتروال $[0, 20]$ تحول می کند، بنا برین نقطه اعظمی مطلق تابع را در انتروال $[0, 20]$ بررسی می کنیم.

$$f(x) = x(20 - x)$$

$$f'(x) = 20 - 2x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 20 - 2x = 0 \Rightarrow x = 10$$

$$f(10) = 10(20 - 10) = 100$$

پس عدد 100 بزرگترین قیمت ممکنه است، و این اعداد عبارت از $x_1 = 10$ و $x_2 = 10$ می باشد.

مثال 2: یک مکعب مستطیل را قاعده آن مربع است در نظر بگیرید، اگر مجموعه سه بعدی آن 24 باشد، بزرگترین حجم مکعب مستطیل را دریافت کنید.

حل: اگر ضلع مکعب مستطیل x و ارتفاع آنرا y در نظر بگیریم. داریم که

$$x + x + y = 24 \Rightarrow y = 24 - 2x$$