

راهنمایی آموزشی ریاضی صنف دوازدهم- دوره پنجم

اهداف آموزشی

در ختم این درس شاگردان قادر گردد تا

- ✓ در مورد مشتقات مرتبه بلند آشنایی حاصل کنند.
- ✓ سوالات مربوط به مشتقات مرتبه بلند حل بتوانند.
- ✓ به روش های حل سوال های مشتقات مرتبه بلند آشنا شوند.

عنوان1: مشتقات مرتبه بلند

صفحه: 77

تعریف: اگر از معادله یک تابع نظر یک متحول چندین مرتبه مشتق گرفته شود، آنرا مشتق مرتبه بلند می نامند. طوریکه مشتق اول را به y' مشتق دوم را به y'' مشتق سوم را به y''' مشتق چهارم را به $y^{(4)}$ و مشتق پنجم را به $y^{(5)}$... نشان می دهد.

نکته: هرگاه تابع چند جمله بی $f_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_nx^n$ داده شده باشد مشتق n -ام آن قرار ذیل دریافت می گردد.

$$f_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_nx^n$$

$$f_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots c_n = n! \ c_n$$

مثال اول: مشتق پنج تابع $y = 2x^6 - 3x^5 - 2x^3 - 3x^2 - 1$ را دریافت نمائید.

حل: از تابع فوق نظر به متحول x پنج مرتبه مشتق می گیریم.

$$y = 2x^6 - 3x^5 - 2x^3 - 3x^2 - 1$$

$$y' = 12x^5 - 15x^4 - 6x^2 - 6x$$

$$y'' = 60x^4 - 60x^3 - 12x - 6$$

$$y''' = 240x^3 - 180x^2 - 12$$

$$y^{(4)} = 720x^2 - 360x$$

$$y^{(5)} = 1440x - 360$$

مثال دوم: مشتق هفتم تابع $y = \sin x$ را دریافت نمائید.

حل: در تابع فوق هفت مرتبه نظر به متحول x مشتق می گیریم.

$$y = \sin x$$

$$y' = \cos x$$

$$y'' = -\sin x$$

$$y''' = -\cos x$$

$$y^{(4)} = \sin x$$

$$y^{(5)} = \cos x$$

$$y^{(6)} = -\sin x$$

$$y^{(7)} = -\cos x$$

فعالیت:

1. فورمول دریافت مشتق مرتبه بلند را ساده سازید.
2. مشتق سوم تابع $y = 3\tan x$ را دریافت نمائید.

تمرین:

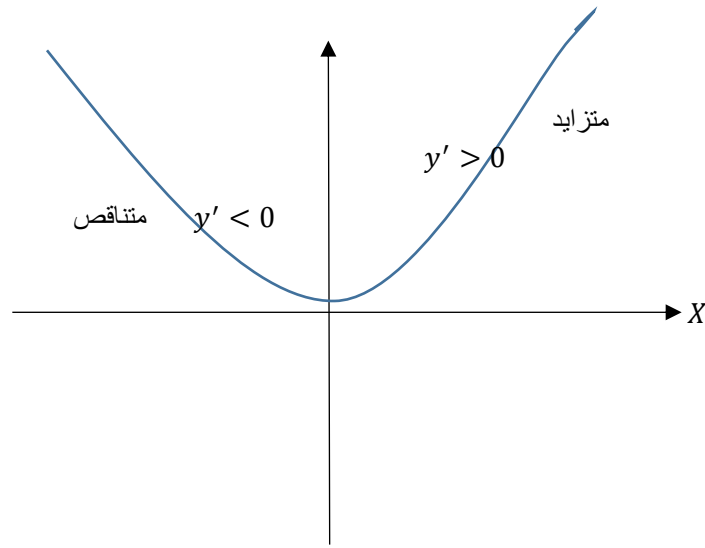
1. مشتق ششم تابع $y = 4x^7 - 7x^5 + 2x$ را دریافت نمائید.
2. مشتق سوم تابع $y = 12x^3 - 2\cos x$ را دریافت نمائید.

عنوان2: موارد استعمال مشتق

صفحه: 85

اهداف:

- شاگردان مفهوم، کاربرد و استعمال مشتق را بدانند.
- شاگردان عملاً مشتق را بکار برده و سوالات مربوط به آن را حل کرده بتوانند.
- شاگردان از کاربرد عملی مشتق در زندگی روزمره احساس خوشی نمایند.



عنوان 3: نقاط بحرانی تابع (اعظمی و اصغری)

صفحه: 89

اهداف آموزشی (دانشی، مهارتی و ذهنیتی)

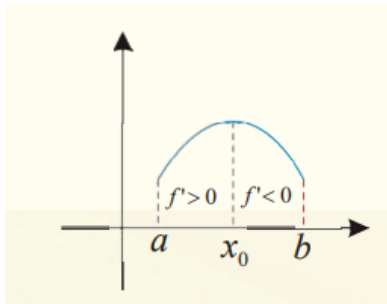
شاگردان مفهوم نقاط بحرانی یک تابع را بدانند.

شاگردان نقاط اعظمی و اصغری یک تابع را دریافت کرده بتوانند.

شاگردان از حل سوالات مربوط به دریافت نقاط بحرانی تابع احساس خوشی نمایند.

تعریف: نقاط بحرانی تابع عبارت از نقاط اند که تابع در آن تحول داشته باشد. که بیشتر در گراف توابع متصور است، نقاط بحرانی تابع شامل (نقاط اعظمی، نقاط اصغری، نقاط انعطاف) می باشد. که هر کدام را با ذکر مثال به بحث می گیریم.

❖ **نقطه اعظمی:** هرگاه یک تابع $y = f(x)$ در یک نقطه معین x_0 از حالت نزاید به حالت تناقص تبدیل می شود یا به عباره دیگر اشاره مشتق در همین نقطه معین x_0 از مثبت به منفی تبدیل گردد، نقطه معین x_0 را نقطه اعظمی تابع می نامند.



تحولات تابع:

1. تابع متزايد: اگر تابع $f(x)$ در انتروال $[a, b]$ متمادی و در انتروال (a, b) مشتق پذیر باشد، اگر در انتروال داده شده $f'(x) > 0$ (مشتق اول تابع مثبت باشد)، درین صورت تابع در همان انتروال متزايد است.
2. تابع متناقص: اگر تابع $f(x)$ در انتروال $[a, b]$ متمادی و در انتروال (a, b) مشتق پذیر باشد، اگر در انتروال داده شده $f'(x) < 0$ (مشتق اول تابع منفی باشد)، درین صورت تابع در همان انتروال متناقص است.

مثال اول: تابع $y = 4x - 2$ متزايد است یا متناقص.

حل: از تابع فوق نظر به متحول x یک نرتبه مشتق می گیریم، در صورت مشتق اول تابع بزرگ از صفر گردد تابع متزايد است و اگر کوچک از صفر گردد متناقص است.

$$y = 4x - 2$$

$$y' = 4 > 0$$

چون مشتق اول تابع بزرگ از صفر است، پس تابع متزايد است.

مثال دوم: نظر به گراف تابع $y = x^2$ نشان دهید که در انتروال متزايد و در کدام انتروال متناقص است؟

حل: با در نظر داشت مشتق اول و گراف تابع انتروال نزاید و تناقص آن را می توان قرار ذیل دریافت نمود.

$$y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$$

$$y' = 2x \Rightarrow \begin{cases} 2x > 0 \Rightarrow x > 0 \rightarrow \text{متزايد } (0, +\infty) \\ 2x < 0 \Rightarrow x < 0 \rightarrow \text{متناقص } (-\infty, 0) \end{cases}$$

حل: برای دریافت نقاط بحرانی مشتق اول تابع را میگیریم و آنرا برابر با صفر قرار می دهیم. نقاط بحرانی تابع دریافت می گردد.

$$y' = 3x^2 - 7x + 2$$

برای دریافت نقاط بحرانی مشتق برابر با صفر قرار داده می شود.

$$3x^2 - 7x + 2 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - x + 2$$

$$\Rightarrow 3x(x - 2) - 1(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2)(3x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

پس تابع دارای دو نقطه بحرانی اند این نقاط عبارت از $(2, -2)$ و $(\frac{1}{3}, \frac{17}{54})$ است.

برای تعیین نقاط اعظمی و اصغری از جدول تعیین اشاره استفاده می کنیم.

$f'(x) = 0$

$3x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}$

$x - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{17}{54}$	-2	-2	$+\infty$
		Max		Min	

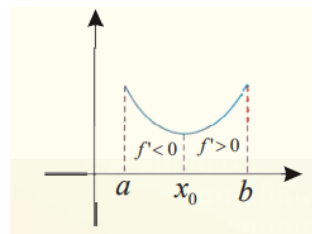
مثال دوم: نقاط اعظمی و اصغری تابع $f(x) = x^3 - 3x + 2$ را دریافت نموده و گراف آن را ترسیم نمائید.

حل: برای دریافت نقاط اعظمی و اصغری مشتق اول را دریافت نموده و مساوی به صفر قرار میدهیم.

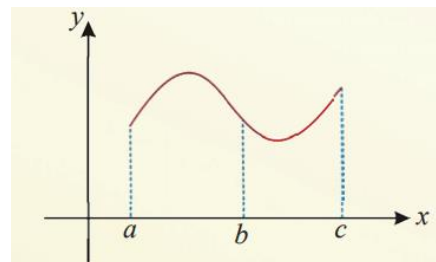
$$f(x) = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

❖ **نقطه اصغری:** هرگاه یک تابع $y = f(x)$ در یک نقطه معین x_0 از حالت تناقص به حالت تزايد تبدیل می شود یا به عباره دیگر اشاره مشتق در همین نقطه معین x_0 از منفی به مثبت تبدیل گردد، نقطه معین x_0 را نقطه اصغری تابع می نامند.



❖ **نقطه انعطاف:** هرگاه مشتق اشاره خود را در یک نقطه معین x_0 از مثبت به صفر و دوباره به مثبت یا از منفی به صفر و دوباره به منفی تغییر دهد، نقطه معین x_0 را بنام نقطه انعطاف می نامند.

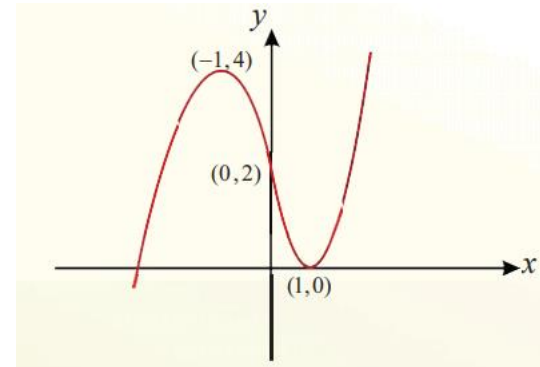


در شکل فوق نقطه b عبارت از نقطه انعطاف تابع است.

نکات:

- مشتق اول تابع در نقاط بحرانی برابر با صفر است.
- برای دریافت نقاط بحرانی تابع مشتق اول آنرا گرفته برابر با صفر قرار می دهیم.
- مشتق دوم تابع در نقاط انعطاف برابر با صفر است.
- برای دریافت نقاط انعطاف مشتق دوم تابع را گرفته برابر با صفر قرار می دهیم (نقطه انعطاف تابع یک بحث جداگانه اند که در درس بعدی خواهیم خواند)

مثال اول: نقاط بحرانی تابع $y = x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x$ را دریافت نمائید.



فعالیت ها: باهم صنفی/همصنفی ها یک گروپ ایجاد نموده و فعالیت های ذیل را انجام دهند.

- نقاط بحرانی چیست؟
- نقطه اعظمی مطلق و اصغری مطلق را از روی گراف تشخیص کنند.
- نقش گراف ها در ریاضی چیست؟
- آیا گراف های توابع کاربرد در زندگی روزمره دارد؟