

راهنمای آموزشی فزیک صنف یازدهم (دور ششم)

اهداف آموزشی:

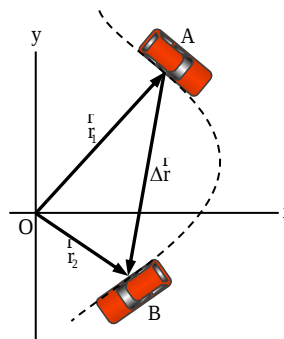
1_ دانش آموزان با مفاهیم اساسی موضوعات (حرکت های دو بعدی، تغییر مکان و سرعت متوسط، سرعت لحظه ای، شتاب متوسط و شتاب لحظه ای، حرکت های پرتابی، پرتاب افقی، پرتاب مایل) آشنایی کامل دریافت کند.

2_ دانش آموزان با موارد استفاده از حرکت های دو بعدی و حرکت های پرتابی آگاهی کامل کسب نمایند.

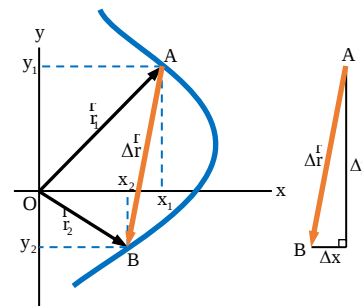
3_ دانش آموزان باید با اهمیت موضوعات هذا آشنا شده و بتوانند در زندگی روزمره شان تطبیق نمایند.

بخش اول: وکتور مکان (موقعیت) و وکتور تغییر مکان

یک موتر که در سطح xoy در مقطع زمانی Δt تغییر موقعیت نماید؛ این موتر در نقطه A و وکتور موقعیت $\vec{r}_1$ و در نقطه B دارای وکتور موقعیت $\vec{r}_2$ می باشد؛ شکل (زیر).



وکتور مکان موتر وکتوری است که مبدأ را به مکان متحرک وصل می کند، که به $\vec{r}$ نشان می دهیم، اگر اندازه مؤلفه های وکتور $\vec{r}$ را بروی محورهای دستگاه مختصات نشان دهیم، وکتور مکان جسم را می توان چنین تعریف کرد.



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}, |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

وکتورهای $\vec{i}$ و $\vec{j}$ را به نام وکتورهای واحد یاد می کنند، که وکتور $\vec{i}$ روی محور x و $\vec{j}$ روی محور y قرار دارند، در (شکل زیر) بخش الف وکتور موقعیت $\vec{r}_1$ جسم را در نقطه A و وکتور موقعیت $\vec{r}_2$ جسم را در نقطه B نشان می دهند. که مؤلفه های هر دو وکتور را چنین می نویسیم

$$\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}, \quad \vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$$

حالا فرض کنید (شکل 9.2) بخش الف جسم از نقطه A (مکان $\vec{r}_1$) به نقطه B (مکان $\vec{r}_2$) انتقال می کند، در این صورت وکتور تغییر مکان (موقعیت) وکتوری است که از نقطه A به نقطه B ترسیم می شود، (شکل 9.2) بخش ب وکتور تغییر مکان را به $\Delta \vec{r}$ نشان داده و چنین محاسبه می کنیم.

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$$

$$\Delta \vec{r} = (\Delta x)\vec{i} + (\Delta y)\vec{j}, \quad |\Delta \vec{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

مثال (9.1): اگر جسمی از مکان $\vec{r}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ به مکان $\vec{r}_2 = -\vec{i} + 7\vec{j}$ منتقل شده باشد، اندازه تغییر مکان متحرک را در SI دریابید؟

حل:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = -\vec{i} + 7\vec{j} - (2\vec{i} + 3\vec{j}) = -3\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$\Rightarrow |\Delta \vec{r}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5\text{m}$$

مثال: موقعیت متحرکی در دو لحظه t_1 و t_2 به ترتیب $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ است، اگر اندازه های هریک از وکتورها به ترتیب 6m و 8m باشد، اندازه تغییر مکان بین این دو لحظه چقدر است در صورتی که زاویه بین وکتور موقعیت ها 90° باشد؟

حل: گفته می توانیم، که وکتور تغییر مکان یعنی $\Delta \vec{r}$ عبارت از وتر مثلث قائم الزاویه است، که اضلاع آن 6m و 8m است، پس داریم که:

$$|\Delta \vec{r}| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10\text{m}$$

مثال: متحرک از نقطه A(8, -6) به نقطه B(-7, 2) منتقل شده است، تغییر مکان متحرک را از نقطه A تا B را در SI حساب کنید؟

حل:

$$|\Delta \vec{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ = \sqrt{(-7 - 8)^2 + (2 + 6)^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} \Rightarrow |\Delta \vec{r}| = 17\text{m}$$

مثال: وکتور تغییر مکان خرگوش را در انتروال $[1\text{s}, 4\text{s}]$ با معادلات حرکت $x = 3t^2 + 2t$ و $y = 2t^2 - 4t$ دریابید؟

حل:

$$f(t) = x = 3t^2 + 2t, \quad f(4) = 3(4)^2 + 2(4) = 56, \quad f(1) = 5$$

$$g(t) = y = 2t^2 - 4t, \quad g(4) = 2(4)^2 - 4(4) = 16, \quad g(1) = -2$$

$$\Delta x = f(4) - f(1) = 56 - 5 = 51, \quad \Delta y = g(4) - g(1) = 16 + 2 = 18$$

$$\Delta \vec{r} = \Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j} = 51\hat{i} + 18\hat{j}$$

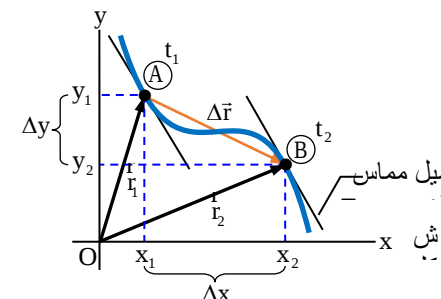
سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای

تعریف 1. اگر جسم متحرک از نقطه A تا به نقطه B در مدت Δt تغییر مکان نماید، (شکل 9.3). پس نسبت تغییر مکان و زمان سرعت متوسط را تعریف می‌کند، پس داریم که:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{j} = \vec{v}_x \hat{i} + \vec{v}_y \hat{j}$$

تعریف 2. لیمت سرعت متوسط وقتی که Δt به طرف صفر تقرب کند، یعنی وقتی که Δt به صفر نزدیک شود، وکتور سرعت لحظه‌ای بر مسیر حرکت در همان نقطه مماس خواهد شد، (شکل 9.3). و یا سرعت لحظه‌ای مشتق وکتور مکان جسم نسبت به زمان است، که به زبان ریاضیکی چنین تعریف می‌گردد.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$$



مثال: موتوری که در یک سطح افقی xoy حرکت می‌کند، معادله‌های حرکت آن در سیستم SI به صورت $x = 6t + 5$ و $y = 4t^2$ است، اندازه سرعت موتور را در $t = 1s$ دریابید؟

حل: در پرسش فوقانی یک زمان مشخص را تعیین نموده است، باید سرعت لحظه‌ای را محاسبه کنیم، پس داریم که:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 6 \Rightarrow v_x(1s) = 6m/s, v_y = \frac{dy}{dt} = 8t \Rightarrow v_y(1s) = 8m/s$$

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \Rightarrow v = 10m/s$$

مثال: معادله حرکت یک جسم در SI به ترتیب $x = 2t^2$ و $y = 4t$ داده شده است، وکتور سرعت متوسط آنرا در وقفه زمانی $t_1 = 4s$ و $t_2 = 8s$ تعیین کند.

حل:

$$f(t) = x = 2t^2, f(4) = 2(4)^2 = 32, f(8) = 2(8)^2 = 128$$

$$g(t) = y = 4t, g(4) = 4(4) = 16, f(8) = 4(8) = 32$$

$$\Delta x = f(8) - f(4) = 128 - 32 = 96$$

$$\Delta y = g(8) - g(4) = 32 - 16 = 16$$

$$\vec{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{j} = \frac{96}{4} \hat{i} + \frac{16}{4} \hat{j} = 24\hat{i} + 4\hat{j}$$

مثال: وکتور موقعیت نقطه مادی در SI به شکل $\vec{r} = (3t^2 - 2)\hat{i} + (t^2 + 3t)\hat{j}$ داده شده است، وکتور سرعت را بعد از 2s حساب کنید؟

حل:

$$g(t) = \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (6t)\hat{i} + (2t + 3)\hat{j} \Rightarrow g(2) = 12\hat{i} + 7\hat{j}$$

مثال: وکتور موقعیت نقطه مادی در SI به صورت $\vec{r} = (t^2 + 4t)\hat{i} + (3t)\hat{j}$ داده شده است، اندازه وکتور سرعت را بعد از 3 ثانیه تعیین کنید؟

حل:

$$g(t) = \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (2t + 4)\hat{i} + (3)\hat{j}$$

$$g(3) = \vec{v} = 10\hat{i} + 3\hat{j}, |\vec{v}| = \sqrt{10^2 + 3^2} = \sqrt{109} m/s$$

مثال: معادلات حرکت یک جسم در SI به صورت $x = 10t$ و $y = -2t^2$ است، سرعت متوسط این متحرک در 3 ثانیه دوم حرکت چه اندازه است؟

حل: سه ثانیه دوم حرکت، انتروال زمانی بین 3 تا 6 ثانیه می‌باشد، که تغییر مکان بین این دو لحظه قرار ذیل محاسبه می‌گردد.

$$f(t) = x = 10t, f(6) = 10(6) = 60, f(3) = 10(3) = 30$$

$$g(t) = y = -2t^2, g(6) = -2(6)^2 = -72, g(3) = -2(3)^2 = -18$$

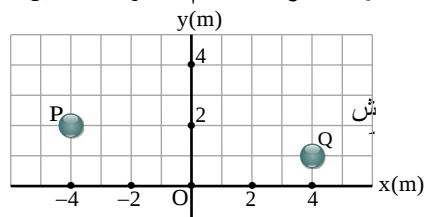
$$\Delta x = f(6) - f(3) = 60 - 30 = 30$$

$$\Delta y = g(6) - g(3) = -72 + 18 = -54$$

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{j} = \frac{30}{3} \hat{i} - \frac{54}{3} \hat{j} = 10\hat{i} - 18\hat{j}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{10^2 + (-18)^2} = \sqrt{100 + 324} \Rightarrow |\vec{v}| \approx 20.6m/s$$

مثال: یک جسم روی صفحه xoy از نقطه P(-4, 2) به نقطه Q(4, 1) در مدت 4 ثانیه انتقال می‌یابد، (شکل 9.4). مقدار سرعت متوسط جسم متحرک را در این زمان محاسبه کنید؟



حل:

$$P(x_1, y_1) = P(-4, 2), \quad Q(x_2, y_2) = Q(4, 1)$$

$$\vec{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j} = \frac{4 - (-4)}{4} \vec{i} + \frac{1 - 2}{4} \vec{j} = 2\vec{i} - \frac{1}{4}\vec{j}$$

$$\Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{2^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{1}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{65} \Rightarrow |\vec{v}| \approx 2 \text{ m/s}$$

شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای

تعریف 1. اگر وکتور سرعت متحرک تغییر کند، آن حرکت را شتاب‌دار گویند، این تغییر می‌تواند در اندازه وکتور سرعت و یا جهت آن باشد، وکتور شتاب متوسط به صورت نسبت تغییر وکتور سرعت و زمان این تغییر سرعت تعریف می‌گردد، شتاب متوسط و وکتور آن را چنین نشان می‌دهیم.

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \vec{j} = \vec{a}_x \vec{i} + \vec{a}_y \vec{j}, \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

تعریف 2. شتاب لحظه‌ای برابر با لیمت شتاب متوسط در زمانی بی‌نهایت کوچک، به سمت آن میل کند، یعنی شتاب لحظه‌ای برابر با مشتق وکتور سرعت نسبت به زمان است، به زبان ریاضیکی طور ذیل نشان می‌دهیم.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} = \vec{a}_x \vec{i} + \vec{a}_y \vec{j}$$

جهت شتاب متوسط ($\vec{a}$) فقط با تغییرات سرعت ($\Delta \vec{v}$) هم‌جهت اند، اما در حرکت روی مسیر منحنی هیچ‌وقت وکتور شتاب متوسط با وکتور وکتورهای $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ هم‌جهت نیستند و وقتی که Δt به طرف صفر تقرب کند وکتورهای $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ بسیار نزدیک می‌شود، باز هم شتاب لحظه‌ای با سرعت لحظه‌ای هم‌جهت نخواهد بود و باید گفت که در حرکت دارای سرعت ثابت روی مسیر منحنی وقتی که Δt به طرف صفر تقرب کند، $\Delta \vec{v}$ بر $\vec{v}$ عمود است.

مثال: معادله حرکت دو بُعدی جسمی در SI به صورت ذیل است: $\begin{cases} x = 20t^2 \\ y = -5t^3 \end{cases}$ ، وکتورهای سرعت و

شتاب آن را در $t = 1s$ به دست آورید، و بگویید که آیا این دو وکتور هم‌جهت اند؟

حل: برای تعیین وکتور سرعت، در مرحله نخست مرکب‌های v_x و v_y را در $t = 1s$ دریافت می‌کنیم.

$$x' = v_x = \frac{dx}{dt} = 40t \Rightarrow v_x(1) = 40 \frac{m}{s}$$

$$y' = v_y = \frac{dy}{dt} = -15t^2 \Rightarrow v_y(1) = -15 \frac{m}{s}$$

در نتیجه وکتور سرعت لحظه‌ای در $t = 1s$ چنین می‌نویسیم.

$$\vec{v} = 40\vec{i} - 15\vec{j}$$

برای تعیین وکتور شتاب نیز ابتدا مرکب‌های شتاب یعنی a_x و a_y را به دست می‌آوریم. داریم که:

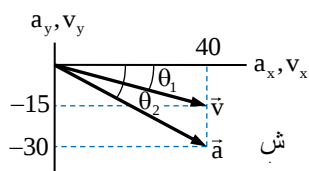
$$(v_x)' = a_x = \frac{dv_x}{dt} = 40 \Rightarrow a_x(1) = 40 \frac{m}{s^2}$$

$$(v_y)' = a_y = \frac{dv_y}{dt} = -30t \Rightarrow a_y(1) = -30 \frac{m}{s^2}$$

و وکتور شتاب را در $t = 1s$ چنین خواهد بود.

$$\vec{a} = 40\vec{i} - 30\vec{j}$$

وکتورهای $\vec{a}$ و $\vec{v}$ در زمان $t = 1s$ می‌توان فهمید که این دو وکتور با هم موازی نیستند، (شکل 9.5).



مثال: معادلات حرکت ذره‌ی در SI روی صفحه xoy به صورت $x = t^3$ و $y = t^3$ است، در کدام فاصله از مبدأ اندازه‌ی شتاب متحرک $12\sqrt{2} \text{ m/s}^2$ می‌رسد؟

حل:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 3t^2 \Rightarrow a_x = \frac{dv_x}{dt} = 6t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 3t^2 \Rightarrow a_y = \frac{dv_y}{dt} = 6t$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \Rightarrow 12\sqrt{2} = \sqrt{36t^2 + 36t^2} \Rightarrow t = 2s$$

$$x(2) = y(2) = (2)^3 = 8 \Rightarrow |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2} \text{ m}$$

حرکت پرتابی (Projectile Motion)

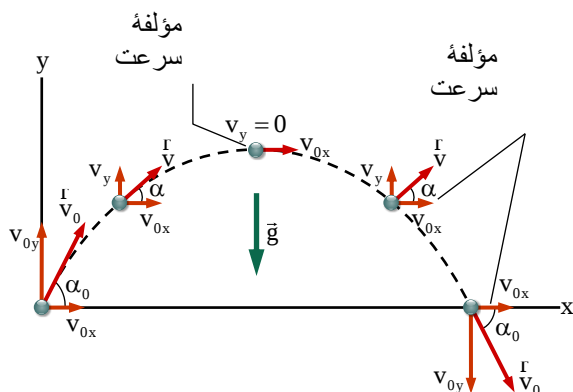
حرکت پرتابی نوعی از حرکت دو بُعدی که با شتاب ثابت است، برای مطالعه و تحلیل حرکت‌های دو بُعدی در مرحله نخست باید سه فرضیه ذیل را در نظر بگیریم.

الف: شتاب جاذبه‌ی (g)، در محدوده حرکت جسم ثابت و جهت شان به طرف پایین است، که شتاب مؤلفه افقی ندارد.

ب: از تأثیر مقاومت هوا می‌توان صرف نظر کرد.

ج: چرخش زمین بر روی این حرکت تأثیری ندارد.

یکی از اصطلاحاتی که در حرکت‌های پرتابی با آن زیاد سروکار داریم عبارت از جسم پرتاب شده است. جسم پرتاب شده عبارت از جسمی است که در آغاز با سرعت اولیه پرتاب و یا بر اثر ضربه در جهتی به حرکت در آید و سپس تحت تأثیر قوه جاذبه، حرکت شتاب‌دار (حد اقل در یکی از محورهای کمیات وضعیه) داشته باشد. مرمی که از تفنگ خارج می‌شود، سنگی که با یک زاویه پرتاب می‌شود، جریان آبی که از سوراخی فوران می‌کند، همه‌گی مثال‌های از حرکت پرتابی هستند که مسیر پارابول شکل را در فضا می‌پیمایند. که اثبات فورمول‌ها و مسایل آن توسط قواعد ریاضیکی آسان‌تر می‌گردد. که در این بخش دو پرتاب دیگر (پرتاب افقی و پرتاب مایل) را مطالعه می‌کنیم.



معادله حرکت، سرعت، و مسیر حرکت جسم پرتاب شده و همین طور زمان رسیدن جسم به نقطه اوج، زمان کلی پرتاب، ارتفاع نقطه اوج و بُرد اعظمی و یا رنج پرتاب جسم را طور ذیل محاسبه می کنیم

$$x = v_{0x}t = v_0 \cos \alpha_0 t$$

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \sin \alpha_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin \alpha_0 - gt$$

اگر مقدار زمان را از معادله حرکت (مسیر x) را در معادله حرکت (مسیر y) بگذاریم، در نتیجه معادله مسیر حرکت را چنین می نویسیم.

$$\Delta y = \tan \alpha_0 x - \frac{gx^2}{2(v_{0x})^2} = \tan \alpha_0 x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0}$$

جسم پرتاب شده وقتی که به نقطه اوج می رسد، $v_y = 0$ می گردد، پس زمان رسیدن جسم به نقطه اوج

را از معادله سرعت روی مسیر y طور ذیل دریافت می کنیم

$$v_y = v_0 \sin \alpha_0 - gt \Rightarrow 0 = v_0 \sin \alpha_0 - gt$$

$$\Rightarrow gt = v_0 \sin \alpha_0 \Rightarrow t = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g}$$

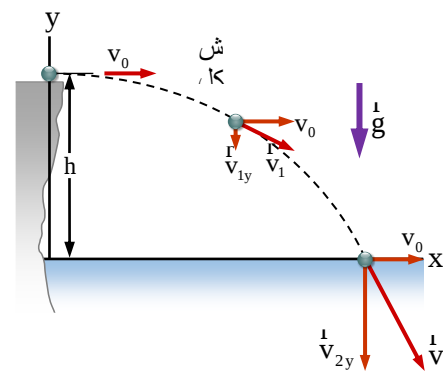
و اکنون زمان کلی فقط با 2 چندشدن زمان رسیدن جسم به نقطه اوج به دست می آید، اگر زمان کلی را به T نشان بدهیم داریم که:

$$T = 2t = \frac{2v_0 \sin \alpha_0}{g}$$

می دانیم که فاصله افقی جسم پرتاب شده دارای زمان 2t است، پس با قرار دادن زمان کلی پرتاب را در معادله حرکت روی مسیر x فاصله افقی جسم پرتاب شده که به نام رنج (Rang) نیز یاد می کند، به دست می آید، بیشترین بُرد پرتاب افقی تحت زاویه 45° صورت می گیرد.

پرتاب افقی و مایل (Lateral and Inclined Projectile)

تعریف 1. هرگاه جسمی را ارتفاع h و یا فاصله y تحت زاویه صفر درجه با جهت محور مثبت x یا موازی به محور x با سرعت اولیه v_0 پرتاب گردد، چنین پرتاب را پرتاب افقی یاد می کنیم، جسم پرتاب شده به حرکت خود به صورت افقی ادامه داده نمی تواند، بلکه آهسته آهسته به طرف پایین کشانیده می شود، (شکل 9.6). که بالاخره به زمین تصادم می کند و باید گفت که حرکت جسم روی محور x یک نواخت دارای سرعت v_0 و به امتداد محور y تعجیلی می باشد، که سرعت آن در این محور رو به افزایش است.



که معادلات حرکت، سرعت و مسیر حرکت آن طور ذیل نشان داده می توانیم.

$$x = v_0 t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v_x = v_0$$

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = v_y = gt$$

اگر از معادله حرکت روی محور x مقدار زمان $t = \frac{x}{v_0}$ را در معادله حرکت روی محور y وضع گردد،

معادله مسیر حرکت را چنین می توان نوشت.

$$y = \frac{g}{2v_0^2}x^2 = cx^2, \quad \frac{g}{2v_0^2} = c$$

و باید گفت که زمان رسیدن جسم به زمین برای همیشه با زمان سقوط آزاد برابر است، که توسط

$$\text{رابطه } t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \text{ محاسبه می شود.}$$

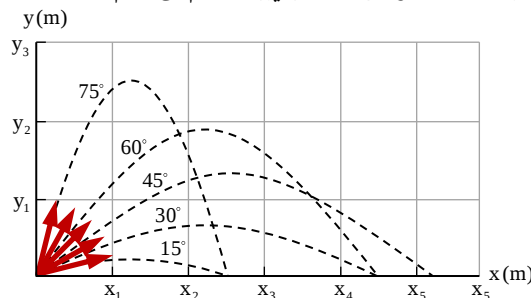
تعریف 2. اگر موقعیت جسم را در مبدأ سیستم کمیات وضعیه قایم در نظر بگیریم یعنی

تحت زاویه α_0 روی صفحه xoy پرتاب گردد، (شکل 9.7)، طوری که جسم

پرتاب شده روی محور x حرکت یک نواخت ($a_x = 0$) و روی محور y حرکت تعجیلی ($a_y = -g$) را

داشته باشد (شکل 9.7).

حل: نظر به رابطه فوقانی شکل (زیر) را رسم می کنیم.



و اکنون بُرد پرتاب را داریم که:

$$\alpha_0 = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ \Rightarrow R_1 = \frac{v_0^2 \sin(2 \cdot 30^\circ)}{g} = \frac{\sqrt{3}v_0^2}{2g}$$

$$\alpha_0 = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ \Rightarrow R_2 = \frac{v_0^2 \sin(2 \cdot 60^\circ)}{g} = \frac{\sqrt{3}v_0^2}{2g}$$

حالا دریافتیم که $R_1 = R_2$ می باشد.

$$x = v_0 \cos \alpha_0 t = v_0 \cos \alpha_0 \left(\frac{2v_0 \sin \alpha_0}{g} \right) \Rightarrow R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

و در آخر ارتفاع نقطه اوج را محاسبه می کنیم، وقتی که جسم به نقطه اوج می رسد $v_y = 0$ می گردد، پس داریم که:

$$v_y^2 - v_{0y}^2 = -2gh \Rightarrow 0 - v_{0y}^2 = -2gh \Rightarrow h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2g}$$

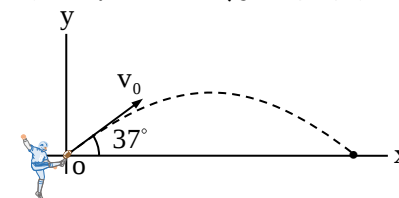
مثال: جسمی از بالای قله کوهی که به ارتفاع 180m از سطح زمین فاصله دارد با سرعت 50m/s به صورت افقی پرتاب می گردد، زمان رسیدن به نقطه سقوط آن و سرعت برخورد جسم به زمین را دریابید؟
حل:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 180m}{10m/s^2}} = \sqrt{36s^2} = 6s$$

$$v_x = \cos t = 50 \frac{m}{s} \cdot v_y = gt, |v_x| = 10 \frac{m}{s^2} \cdot 6s = 60 \frac{m}{s}$$

$$v = v_x i + v_y j, |v| = \sqrt{50^2 + 60^2} \frac{m}{s} \approx 78.1m/s$$

مثال: یک بازیکن فوتبال، توپی را تحت زاویه 37° نسبت به افق با سرعت اولیه $10m/s$ ، شوت می کند، با فرض این که توپ در صفحه xoy حرکت کند و مقاومت هوا ناچیز باشد، (شکل زیر).



الف: زمان رسیدن جسم به نقطه اوج را به دست آورید؟
ب: بگویید که پس از چه زمانی توپ به زمین بر می گردد؟
حل:

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g} = \frac{10 \frac{m}{s} \cdot \sin 37^\circ}{9.8 \frac{m}{s^2}} \approx 0.6s$$

$$T = 2t = \frac{2v_0 \sin \alpha_0}{g} = \frac{2 \cdot 10 \frac{m}{s} \cdot \sin 37^\circ}{9.8 \frac{m}{s^2}} \approx 1.2s$$

مثال: گاليله در یکی از کتاب های خود نوشته است که برای زاویه های پرتابی که به یک اندازه از زاویه ی 45° بیش تر یا کم تر اند، بُردها مساوی اند، درستی این گفته را اثبات کنید.