

راهنمای آموزشی صنف نهم - دوره ششم

سیستم معادلات خطی

سیستم معادلات خطی را به نام سیستم معادلات دو مجهوله درجه اول نیز یاد می کنند. شکل

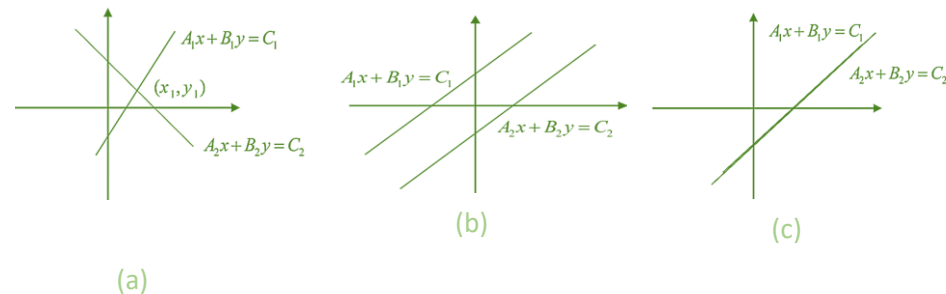
عمومی آن به صورت $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ بوده طوریکه $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ اعداد ثابت و x, y مجهول معادله می باشند.

برای اینکه بدانیم سیستم معادلات فوق دارای حل می باشد یا خیر، سه حالت ذیل را در نظر می گیریم.

1. اگر $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ باشد خطوط با یکدیگر در یک نقطه متقاطع است، معادله یک حل دارد.

2. اگر $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ باشد خطوط با یکدیگر موازی است، معادله حل ندارد.

3. اگر $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ باشد خطوط با یکدیگر منطبق است، معادله بینهایت حل دارد.



حل سیستم معادلات دو مجهوله درجه یک

سیستم معادلات دو مجهوله به روش های مختلف قابل بوده که در همه روش ها عین جواب به دست می آید، که عبارت اند از:

1. حل سیستم معادلات دو مجهوله به روش مساوات

2. حل سیستم معادلات دو مجهوله به روش تعویضی

3. حل سیستم معادلات دو مجهوله به روش افنا (مساوی ساختن ضرایب)

البته روش های دیگر هم وجود دارد مانند روش گراف، روش دیترینانت، روش گاوس و غیره. اما روش های فوق مورد بحث ما است.

1. حل سیستم معادلات دو مجهوله درجه اول به روش مساوات

در این روش یکی از مجهول ها را در هر دو معادله در نظر گرفته از جنس مجهول دیگر آن را پیدا می نماییم، بعداً با استفاده از مساوی بودن یک طرف مساوات، طرف دیگر آن را مساوی قرار داده یکی از مجهول ها را دریافت می گردد و بعد با وضع نمودن یکی از معادلات مجهول دومی نیز دریافت خواهد گردید.

مثال 1

سیستم معادلات دو مجهوله ذیل را به روش مساوات حل نمایید:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 19 \dots (1) \\ 3x + y = 9 \dots (2) \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{19-5y}{2} \dots (1) \\ x = \frac{9-y}{3} \dots (2) \end{cases}$$

از مقایسه رابطه 1 و 2 چون یک طرف مساوات باهم مساوی اند طرف دیگر مساوات نیز مساوی اند، پس می توان نوشت:

$$\begin{cases} x = \frac{19-5y}{2} \dots (1) \\ x = \frac{9-y}{3} \dots (2) \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow \frac{19-5y}{2} &= \frac{9-y}{3} \\ 57-15y &= 18-2y \\ -15y+2y &= 18-57 \\ -13y &= -39 \\ \Rightarrow y &= 3 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= \frac{19-5y}{2} \dots (1) \\ x &= \frac{19-5(3)}{2} \\ x &= \frac{4}{2} \Rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

مثال 1

سیستم معادلات دو مجهوله درجه اول ذیل را به روش افنا حل نمایید:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \dots (1) \\ 3x + 2y = 4 \dots (2) \end{cases}$$

$$3 \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 9y = -3 \\ \pm 6x \pm 4y = \pm 8 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 0 - 13y = -11 \\ \hline \Rightarrow y = \frac{11}{13} \end{array}$$

$$2x - 3y = -1 \dots (1)$$

$$2x - 3\left(\frac{11}{13}\right) = -1$$

$$2x = -1 + \frac{33}{13}$$

$$2x = \frac{20}{13} \div 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{20}{26} \Rightarrow x = \frac{10}{13}$$

تغییر مکان Transformation

رابطه که یک نقطه از سیستم کمیات وضعیه را تنها به نقطه دیگر روی سیستم نسبت می دهد تغییر مکان یا تبدیل گفته می شود.

این موضوع را توسط یک مثال به صورت ساده تشریح می نماییم:

مثال 1

تصویر نقاط $A(4, 1)$ ، $B(1, 2)$ و $C(2, 4)$ را تحت تبدیلی های زیر در مستوی به دست آرید.

$$a: (x, y) \xrightarrow{t_1} (-x, y) \quad c: (x, y) \xrightarrow{t_3} (x, -y)$$

$$b: (x, y) \xrightarrow{t_2} (y, x) \quad d: (x, y) \xrightarrow{t_4} (x + 2, y + 3)$$

حل: ابتدا نقطه داده شده را روی سیستم کمیات وضعیه مشخص می نماییم، بعداً با توجه به نوعیت تبدیلی تصویر آن را میابیم.

a) تحت این تبدیلی فقط مختصه x را ضرب منفی یک می کنیم:

2. حل سیستم معادلات دو مجهوله درجه اول به روش تعویضی

در این روش قیمت یکی از مجهول ها را از یک معادله از جنس دیگری دریافت و در معادله دومی تعویض می نماییم، در این صورت معادله یک مجهوله درجه یک بدست می آید که با ساده نمودن آن می توان مجهول دوم را نیز بدست آورد.

مثال 1

سیستم معادلات دو مجهوله درجه اول را به روش تعویضی حل نمایید:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 8 \dots (1) \\ 4x - 6y = 4 \dots (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{8 - 5y}{2} \dots (2)$$

$$4\left(\frac{8 - 5y}{2}\right) - 6y = 4 \dots (2)$$

$$16 - 10y - 6y = 4$$

$$-16y = 4 - 16$$

$$-16y = -12$$

$$\Rightarrow y = \frac{-12}{-16} \Rightarrow y = \frac{3}{4}$$

با قیمت گذاری y در یکی از معادله قیمت x حاصل می شود.

$$\Rightarrow 2x + 5y = 8 \dots (1)$$

$$2x + 5\left(\frac{3}{4}\right) = 8$$

$$2x = 8 - \frac{15}{4}$$

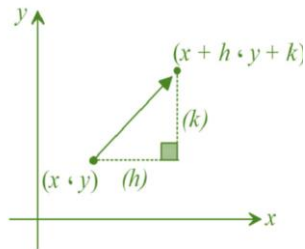
$$2x = \frac{32 - 15}{4} = \frac{17}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{17}{8}$$

3. حل سیستم معادلات دو مجهوله به روش مساوی ساختن ضرایب (افنا)

در این روش یکی از مجهول ها را در نظر گرفته، طوریکه ضریب معادله اول را در معادله دوم و معادله دوم را در اول ضرب نموده تا ضرایب آن مجهول باهم مساوی گردد و بعداً عملیه افنا (جمع و تفریق) را انجام داده تا یک مجهول از بین رفته و مجهول دومی دریافت گردد و سپس با وضع قیمت آن در یکی از معادلات مذکور می توان، مجهول اولی را به سادگی به دست آورد.

هرگاه تمام نقاط یک شکل به یک فاصله معین به یک سمت حرکت دهیم شکل دومی بنام منتقله شکل اولی می گوید، که این حرکت را به نام انتقال یاد می نمایند. انتقال را طوری ذیل نشان می



$$(x, y) \xrightarrow{T} (x + h, y + k)$$

دهد.

خواص انتقال

- انتقال یک تبدیل ایزومتري است. یعنی محیط و مساحت شکل تغییر نمی کند.
- در انتقال میل یک خط تغییر نمی کند.
- انتقال نظر به یک وکتور صورت می گیرد که به نام وکتوری انتقال یاد می شود.

انعکاس Reflection

اگر یک نقطه از یک شکل به یک شکل دومی طوری تبدیل شود که فاصله هر نقطه از یک خط (محور) برابر باشد این تبدیل را به نام انعکاس یاد می کنند.

خواص انعکاس

- انعکاس نیز یک تبدیل ایزومتري است.
- انعکاس جهت شکل (میل خط) تغییر می کند.
- انعکاس همیشه نظر به یک خط (محور) یا یک نقطه صورت می گیرد.
- تبدیل $T(x, y) = (-x, y)$ انعکاس نسبت به محوری Y است.
- تبدیل $T(x, y) = (x, -y)$ انعکاس نسبت به محوری X است.
- تبدیل $T(x, y) = (y, x)$ انعکاس نسبت به مستقیم $y=x$ است.

مثال 1

هرگاه نقاط $A(2, 0)$, $B(6, 2)$, $C(5, 4)$, $D(1, 2)$ راس های یک مستطیل باشد، مستطیل را در سیستم کمیات وضعه قایم رسم نموده، تصویر آن را نظر به هردو محور رسم نمایید.

$$\begin{aligned}(x, y) &\xrightarrow{t_1} (-x, y) \\ A(4, 1) &= (-4, 1) \\ B(1, 2) &= (-1, 2) \\ C(2, 4) &= (-2, 4)\end{aligned}$$

(b) تحت این تبدیلی فقط مختصه x و y را تبدیل می کنیم:

$$\begin{aligned}(x, y) &\xrightarrow{t_2} (y, x) \\ A(4, 1) &= (1, 4) \\ B(1, 2) &= (2, 1) \\ C(2, 4) &= (4, 2)\end{aligned}$$

(c) تحت این تبدیلی فقط مختصه y را ضرب منفی یک می کنیم:

$$\begin{aligned}(x, y) &\xrightarrow{t_3} (x, -y) \\ A(4, 1) &= (4, -1) \\ B(1, 2) &= (1, -2) \\ C(2, 4) &= (2, -4)\end{aligned}$$

(d) تحت این تبدیلی فقط مختصه x جمع عدد 2 و مختصه y را جمع عدد 3 می کنیم:

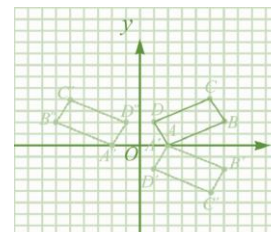
$$\begin{aligned}(x, y) &\xrightarrow{t_4} (x + 2, y + 3) \\ A(4, 1) &= (6, 4) \\ B(1, 2) &= (3, 5) \\ C(2, 4) &= (4, 7)\end{aligned}$$

نکته: اگر در یک تبدیل که فاصله بین نقاط تغییر نکند تبدیل ایزومتري است. در تبدیل ایزومتري

تصویر یک شکل با اصل انطباق پذیر است.

انتقال Translation

حل: برای رسم تصویر نظر به محوری x مختصه y را ضرب منفی یک نموده و برای رسم تصویر نظر به محوری y مختصه x را ضرب منفی یک می نماییم، طوری که در شکل دیده می شود



نقاط (x, y)	انعکاس نظر به محور x ($x, -y$)	انعکاس نظر به محور y ($-x, y$)
$A(2, 0)$	$A'(2, 0)$	$A''(-2, 0)$
$B(6, 2)$	$B'(6, -2)$	$B''(-6, 2)$
$C(5, 4)$	$C'(5, -4)$	$C''(-5, 4)$
$D(1, 2)$	$D'(1, -2)$	$D''(-1, 2)$

دوران Rotations

اگر یک شکل در یک مستوی حول یک نقطه ثابت به اندازه یک زاویه دوران نمایید، تمام نقاط شکل به همان اندازه دوران می کنند.

که دوران نظر به یک مرکز و یک زاویه صورت می گیرد، اگر هم جهت عقربه ساعت باشد دوران منفی و اگر مخالف عقربه ساعت باشد دوران مثبت است.

