

■ ریاضی صنف دهم فصل اول

✱ درس دوم - پولینوم ها (چند جمله ای ها)

در این درس، شما با مفاهیم اقسام پولینوم و درجه آن، پولینوم های نزولی و صعودی، پولینوم های معادل، پولینوم های متجانس، دریافت قیمت و مجموع ضرایب یک پولینوم، عملیه های چهارگانه پولینوم ها، قضیه باقی مانده، قضیه فکتور و تقسیم ترکیبی آشنا خواهید شد. این مفاهیم به شما کمک می کنند تا پایه های ریاضی خود را تقویت کنید و روش های مختلفی را برای بررسی پولینوم ها بیاموزید.

✱ هدف کلی درس:

فهم عمیق و کاربردی مفاهیم مربوط به پولینوم ها توسط شاگردان، به گونه ای که بتوانند با استفاده از روش های مفهومی، ابتکاری و تمرین با اشیای واقعی، پولینوم ها را شناسایی کرده، عملیات ریاضی را بر آن ها تطبیق دهند، فکتورها و باقی مانده را تشخیص دهند و این مفاهیم را در حل مسائل ریاضی و زندگی روزمره به کار گیرند.

2. اقسام پولینوم و درجه آن

تعریف:

پولینوم یا چند جمله ای، یک عبارت الجبری است که از **جمع یا تفریق چند جمله** که دارای متحول و توان صحیح غیر منفی هستند، ساخته می شود.

اقسام:

توضیح	مثال	نوع پولینوم
فقط یک عدد است	7	عدد ثابت
یک جمله دارد	$3x$	یک جمله ای (Monomial)
دو جمله دارد	$4x - 5$	دو جمله ای (Binomial)
سه جمله دارد	$x^2 - 2x + 1$	سه جمله ای (Trinomial)
بیش از یک جمله دارد	$x^3 + 2x^2 - x + 3$	چند جمله ای (Polynomial)

درجه پولینوم:

بزرگ ترین توان متحول در پولینوم، درجه آن است.

مثال: در $P(x) = 5x^3 - 2x + 4$ ، درجه = 3

روش ابتکاری :

با رنگ آمیزی عددهای توان در عبارت، بزرگترین را پیدا کنید. برای شاگردان کم سن، می توانید از مهره ها یا دانه های رنگی استفاده کنید تا درجه را پیدا کنند.

▲ پولینوم های صعودی و نزولی

صعودی:

توان ها از کوچک به بزرگ مرتب شده اند.

$$-27 + 26x - 17x^2 + 4x^3 + x^4 + 7x^5$$

نزولی:

توان ها از بزرگ به کوچک مرتب شده اند.

$$7x^5 + x^4 - 17x^2 + 26x - 27 \Rightarrow 7x^5 + x^4 + 0x^3 - 17x^2 + 26x - 27$$

نکته : اگر یک پولینوم از دو یا چند متحول تشکیل شده باشد می توانیم پولینوم را نظر به هر متحول که خواسته باشیم به شکل صعودی یا نزولی ترتیب نماییم .

! یادگیری با اشیاء واقعی:

یک نردبان درست کنید که پله ها را به صورت توان های X شماره گذاری کرده اید. بالا رفتن = صعودی، پایین آمدن = نزولی.

🔄 پولینوم های معادل

دو پولینوم وقتی معادل هستند که در تمامی مقادیر X ، مقدارشان مساوی باشد.

در صورتیکه که $p(x)$ و $q(x)$ دو پولینوم معادل باشند گفته می توانیم :

$$\left. \begin{aligned} p(x) &= a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \\ q(x) &= b_1x^1 + b_2x^2 + \dots + b_nx^n \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(x) = Q(x), a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$$

مثال: اگر پولینوم $x^3 + 3x^2 + x + 3$ و پولینوم $x^3 + ax^2 + bx + c$ ، پولینوم های معادل باشند، قیمت a, b, c را بیابید.

$$x^3 + ax^2 + bx + c = x^3 + 3x^2 + x + 3 \longrightarrow a = 3 \quad b = 1 \quad c = 3$$

هر دو پولینوم معادل در مقدارهای مختلف X ، نتیجه‌ی یکسان می‌دهند.

پولینوم‌های متجانس

پولینومی که همه جمله‌هایش دارای درجه یکسان باشند.

بطور مثال افاده $10x^2 - 20y^2 + z^2$ یک افاده متجانس می‌باشد.

مثال: اگر پولینوم $3x^2y + 5x^mz - 7y^{n-3}z^2$ متجانس باشد، قیمت‌های m و n را دریابید.

$$3x^2y + 5x^mz - 7y^{n-3}z^2$$

$$m + 1 = 2 + 1$$

$$m = 2$$

$$n - 3 + 2 = m + 1$$

$$n - 1 = 2 + 1$$

$$n = 4$$

تمرین با کارت:

روی هر کارت یک جمله از پولینوم بنویسید، درجه‌شان را بگویید. کارت‌های هم‌درجه را جدا کنید.

دریافت قیمت یک پولینوم

با جای‌گذاری مقدار مشخصی از X ، مقدار پولینوم را می‌یابیم.

مثال:

$$1) f(x) = 5x^2 - 8, \quad x = 3$$

$$f(3) = 5(3)^2 - 8$$

$$f(3) = 5 \cdot 9 - 8$$

$$f(3) = 45 - 8$$

$$f(3) = 37$$

$$2) f(a) = a^3 - a^2 + 2a - 3, \quad a = 2$$

$$f(2) = 2^3 - 2^2 + 2 \cdot 2 - 1$$

$$f(2) = 8 - 4 + 4 - 1$$

$$f(2) = 8 - 1$$

$$f(2) = 7$$

مثال مفهومی:

حجم استوانه‌ی را دریافت نمائید که شعاع قاعده آن $r = 10\text{cm}$ و ارتفاع آن $h = 20\text{cm}$ باشد.

در حالیکه فورمول دریافت حجم استوانه $v = \pi r^2 h$ باشد.

$$v = \pi r^2 h$$

$$v = 3.14 \cdot (10)^2 \cdot 20 = 3.14 \cdot 100 \cdot 20 \Rightarrow v = 6280 \text{ cm}^2$$

➤ دریافت حد ثابت و مجموعه ضرایب عددی در پولینوم :

برای دریافت مجموع ضرایب عددی $P(1)$ را محاسبه میکنیم . و برای دریافت عدد ثابت در یک پولینوم $P(0)$ را محاسبه میکنیم.

مثال: در پولینوم ذیل مجموعه ضرایب و حد ثابت را دریافت کنید.

$$P(a) = 2a^3 + 5a^2 - 13a + 6$$

$$P(1) = 2(1)^3 + 5(1)^2 - 13(1) + 6 \Rightarrow P(1) = 2 + 5 - 13 + 6 \Rightarrow P(1) = 0 \text{ مجموع ضرایب}$$

$$P(a) = 2a^3 + 5a^2 - 13a + 6$$

$$P(0) = 2(0)^3 + 5(0)^2 - 13(0) + 6 \Rightarrow P(0) = 6 \text{ حد ثابت}$$

🎲 روش بازی :

هر شاگرد یک کارت با یک جمله دارد. هر کس ضریب خود را می گوید و بقیه جمع می کنند.

÷ عملیات چهارگانه روی پولینوم ها

جمع و تفریق:

همانند جمع/تفریق جملات هم نوع.

مثال: عملیه جمع و تفریق در پولینوم ها بالای حدود مشابه انجام میشود , طوری که ضرایب حدود مشابه را بایک دیگر جمع و یا تفریق میشوند.

مثال: پولینوم های ذیل را جمع نمائید .

$$A = 5x^3y - 2xp^2 - 6$$

$$1) \frac{B = 3x^3y - 8xp^2 + 11}{A + B = 8x^3y - 10xp^2 + 5}$$

$$A + B = ?$$

ضرب:

هر جمله از پولینوم اول را با همه جمله‌های دوم ضرب کنید.

مثال: حاصل ضرب پولینوم های $P(x) = x^3 + 2x$ و $Q(x) = 2x^2 - x + 1$ را بدست آورید.

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (x^3 + 2x) \cdot (2x^2 - x + 1) = 2x^5 - x^4 + x^3 + 4x^3 - 2x^2 + 2x \\ &= 2x^5 - x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 2x \end{aligned}$$

تقسیم: در صورتیکه درجه $P(x)$ بزرگتر یا مساوی به درجه $Q(x)$ و $Q(x) \neq 0$ باشد آن را میتوان طور ذیل تقسیم نمود:

$$\begin{array}{ccc} \text{مقسوم} & \longleftarrow P(x) & \left| \begin{array}{c} Q(x) \\ T(x) \end{array} \right. \longrightarrow \begin{array}{c} \text{مقسوم علیه} \\ \text{خارج قسمت} \end{array} \\ \text{باقی مانده} & \longleftarrow \overline{K(x)} & \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} P(x) = Q(x) \cdot T(x) + K(x) \\ \frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{K(x)}{Q(x)} \end{array} \right.$$

• در تقسیم دو پولینوم بر یک دیگر مقسوم و مقسوم علیه را به شکل نزولی منظم مینماییم.

مثال حاصل تقسیم های ذیل را بدست آورید.

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 13x + 12 \quad \left| \begin{array}{c} x^2 - 2x + 3 \\ 2x^2 + 7x + 4 \end{array} \right. \\ \underline{2x^4 - 4x^3 + 6x^2} \\ -7x^3 + 10x^2 + 13x \\ \underline{7x^3 - 14x^2 + 21x} \\ -4x^2 - 8x + 12 \\ \underline{4x^2 - 8x + 12} \\ 0 \end{array} \quad \pm \quad \begin{array}{r} 2x^4 - 3x^2 - 4x + 1 \quad \left| \begin{array}{c} x^2 - 3 \\ 2x^2 + 3 \end{array} \right. \\ \underline{2x^4 \mp 6x^2} \\ 3x^2 - 4x + 1 \\ \underline{\pm 3x^2 \mp 9} \\ -4x + 10 \end{array}$$

• عملیه تقسیم را تا زمانی ادامه میدهیم که درجه متحول باقی مانده کوچکتر از درجه متحول مقسوم علیه گردد یا باقی مانده صفر شود.

مانند تقسیم اعداد با باقی، یا تقسیم ترکیبی (در ادامه می‌آید).

قضیه باقی‌مانده

با استفاده از قضیه باقی‌مانده مقدار باقی‌مانده را بدون اجرا عملیه تقسیم قرار رابطه ذیل حاصل میکنیم .
قضیه باقی‌مانده بیان کننده این مطلب است که برای دریافت باقی‌مانده کافی است قیمت X با بزرگترین درجه را از مقسوم علیه دریافت نموده و در مقسوم وضع کنیم و یا در صورتی که مقسوم علیه درجه یک باشد برای دریافت باقیمانده کافی است مقسوم علیه را برابر صفر قرار داده جذر مقسوم علیه را در مقسوم وضع نمائیم، عدد حاصله همان باقیمانده است.

$$\begin{array}{l} P(x) \bigg| \begin{array}{l} x+a \\ T(x) \end{array} \\ \hline R \end{array} \quad \text{ثبوت :}$$
$$x+a=0 \Rightarrow x=-a$$
$$P(x)=T(x) \cdot (x+a)+R$$
$$P(-a)=T(-a) \cdot (-a+a)+R \Rightarrow P(-a)=T(-a) \cdot 0+R \Rightarrow P(-a)=R$$

$$1) (x^3 - 5x^2 + 6x - 8) \div (x - 2) = ?$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 8 \Rightarrow f(2) = 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 8$$

$$f(2) = 32 - 20 + 12 - 8 \Rightarrow f(2) = 16$$

$$2) (y^4 + 8y^2 - 9y^3 - 7y + 4) \div (2y - 1) = ?$$

$$2y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

$$f(y) = y^4 + 8y^2 - 9y^3 - 7y + 4$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 8\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 9\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 7\left(\frac{1}{2}\right) + 4$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} + -8 \cdot \frac{8}{4} - \frac{9}{8} - \frac{7}{2} + 4$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1+32-18-56+64}{16} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{23}{16}$$

قضیه فکتور

این قضیه بیان کننده این مطلب است که اگر $P(a) = 0$ باشد پس پولینوم $P(x)$ بر افاده $(x - a)$ پوره قابل تقسیم است و نیز اگر پولینوم $P(x)$ تجزیه شود، یکی از قوس‌های حاصله در تجزیه $P(x)$ قوس $(x - a)$ است.

• برعکس قضیه فکتور نیز قابل تطبیق است که اگر $(x - a)$ یک فکتور پولینوم $P(x)$ باشد پس $P(a) = 0$ است و عدد a یک جذر معادله پولینومی $P(x) = 0$ میباشد.

مثال: به اساس قضیه فکتور نشان دهید که $(x - 2)$ یک فکتور پولینوم $P(x) = x^5 - 32$ است.

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$P(x) = x^5 - 32 \Rightarrow P(2) = (2)^5 - 32 \quad P(2) = 32 - 32 = 0 \Rightarrow P(2) = 0$$

مثال: به اساس قضیه فکتور نشان دهید که $(x - 2)$ یک فکتور پولینوم ذیل

$$p(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 28 \text{ میباشد.}$$

$$p(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 28 \quad x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$p(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 28$$

$$p(2) = 8 + 3 \cdot 4 + 8 - 28$$

$$p(2) = 8 + 12 + 8 - 28 \Rightarrow p(2) = 0$$

چون $p(2) = 0$ or $R = 0$ است، پس $(x - 2)$ یک فکتور پولینوم فوق میباشد.

نکته مهم:

اگر گفته شود $P(a) = 0$ است، سه نتیجه ذیل حاصل می‌شود:

۱- اگر پولینوم $P(x)$ به چند قوس (فکتور) تجزیه شود، یکی از این فکتورها $(x - a)$ است.

$$P(x) = (x - a) \cdot \dots$$

۲- اگر پولینوم $P(x)$ برابر صفر قرار داده شود، در معادله‌ی حاصل شده یک جذر آن $x = a$ است.

$$P(x) = 0 \quad , \quad x_1 = a$$

۳- پولینوم $P(x)$ بالای $(x-a)$ پوره قابل تقسیم است.

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x-a \\ \hline & Q(x) \\ \hline 0 \end{array}$$

÷ تقسیم ترکیبی (روش ساده تر از تقسیم طولانی).

تقسیم ترکیبی کوتاه ترین روش برای تقسیم پولینوم $P(x)$ بر $(x-a)$ میباشد که برای یافتن خارج قسمت , باقی مانده , تجزیه افاده های الجبری و یافتن جذور معادله استفاده میشود که به طریقه ذیل انجام میگردد. ضرایب عددی مقسوم را پس از ترتیب نزولی در سمت چپ نوشته و جذر مقسوم علیه را در قسمت بالا سمت راست مینویسیم اولین ضریب مقسوم بدون تغییر به پایین انتقال نموده پس از ضرب شدن در جذر مقسوم علیه تحت ضریب حد دوم مقسوم علیه قرار میگیرد عملیه جمع را بالای این دو عدد انجام داده حاصل را مجدداً در جذر مقسوم علیه ضرب نموده تحت ضریب حد سوم مقسوم مینویسیم این عملیه را تا زمانی انجام میدهیم تا به حد آخر برسیم آخرین عدد باقی مانده بوده متباقی ضریب خارج قسمت .

- از تقسیم ترکیبی در تقسیم هایی استفاده میشود که مقسوم علیه درجه یک باشد. درجه خارج قسمت یک واحد کوچکتر از درجه مقسوم است.

- در استفاده از تقسیم ترکیبی مقسوم را باید به شکل نزولی کامل نماییم .

مثال : $4x^4 + 12x^3 - 13x^2 - 33x + 18 \div (x + 4)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 4 & 12 & -13 & -33 & +18 & \\ & -16 & 16 & -12 & +180 & -4 \\ \hline 4 & -4 & 3 & -45 & 198 & \end{array} \quad \begin{array}{l} x+4=0 \Rightarrow x=-4 \\ \\ \end{array}$$

باقی مانده $\rightarrow$

$$P(x) = (4x^3 - 4x^2 + 3x - 45)(x + 4) + 198$$

$$\underbrace{4x^3 - 4x^2 + 3x - 45}_{\text{خارج قسمت}}$$

تمرین با اشیاء واقعی

- چینه یا مهره‌های رنگی: هر رنگ نشان‌دهنده درجه خاصی باشد. بچه‌ها با چیدن آن‌ها درجه پولینوم را می‌سازند.
- نردبان درجه: هر پله = توان X . بالا = صعودی، پایین = نزولی.
- کارت پولینوم: جملات روی کارت بنویسید، شاگردا ترتیب، جمع و ضرب کنند.

خلاصه آنچه باید بیاموزید:

مفهوم	نکته کلیدی
اقسام پولینوم	بر اساس تعداد جملات
درجه	بزرگ‌ترین توان متحول
صعودی/نزولی	ترتیب توان‌ها
معادل	مقدار برابر در همه X
متجانس	همه جملات با درجه یکسان
دریافت قیمت	جای‌گذاری مقدار X
مجموع ضرایب	جمع ضرایب همه جملات
عملیات	جمع، تفریق، ضرب، تقسیم
قضیه باقی‌مانده	اگر $p(x)$ تقسم بر $x-a$ شود $P(a)=r$ باقی مانده است
قضیه فکتور	اگر $P(a)=0$ پس $x-a$ یک فکتور است
تقسیم ترکیبی	روش سریع برای تقسیم

ورق کار: پولینوم‌ها

نام شاگرد: _____

تاریخ: _____

بخش اول: شناسایی مفاهیم (پُر کردنی)

- پولینومی که فقط یک جمله دارد، _____ نام دارد.
- در عبارت $p(x) = 10x^2 + 5x - 10$ ، درجه پولینوم برابر است با _____.

۳. پولینوم‌هایی که توان‌هایشان از بزرگ به کوچک مرتب باشند، _____ نام دارند.
۴. اگر $f(x) = \sqrt{8x^2 - 9x + 14} + 5x$ ، آنگاه قیمت $P(3)$ برابر است با. _____
۵. اگر $p(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 28$ و $p(2) = 0$ باشد، آنگاه یکی از فکتورهای آن _____ است.
۶. مجموع ضرایب عبارت $(3x - 1)^3$ مساوی است با. _____

بخش دوم: تطبیق (وصل کردنی)

اعداد ستون (الف) را با گزینه مناسب در ستون (ب) وصل کنید:

الف	ب
$4x^2 - 12x + 9$	دو جمله‌ای
$5x$	دارای درجه ۳
$x + 3x$	معادل با $(2x - 3)^2$
$2x - 2x^3 - 4x$	تک جمله‌ای

بخش سوم: عملیات ریاضی (حل کردنی)

- جمع کنید:
 $(3x^2 + 5x - 2) + (x^2 - 2x + 4)$
- تفریق کنید:
 $(4x^2 + 3x - 1) - (2x^2 + x + 5)$
- ضرب کنید:
 $(x + 3)(x - 2)$
- قیمت را پیدا کنید:
 اگر $P(x) = x^2 - 4x + 7$ ، قیمت $P(1) =$ _____

بخش چهارم: درست یا نادرست؟ (✓/✗)

- $x^2 + 2x + 1$ و $(x + 1)^2$ معادل نیستند ✗ / ✓ .
- در پولینوم متجانس، همه جملات دارای درجه مختلف هستند ✗ / ✓ .
- باقی مانده تقسیم $P(x) = x^2 - 1$ بر $x - 1$ برابر صفر است ✗ / ✓ .
- در تقسیم ترکیبی، از جای گذاری مستقیم استفاده می‌شود ✗ / ✓ .

بخش پنجم: چالش مفهومی

درست کنید:

۱. یک پولینوم سه جمله‌ای بسازید که درجه‌اش ۴ باشد و صعودی نوشته شده باشد:

→

۲. یک مثال از پولینوم متجانس درجه ۳ بنویسید:

→

۳. یک پولینوم بنویس که مقدارش در $x = 2$ برابر با صفر باشد.

→

✓ بخش پایانی: نظر شما

کدام بخش این ورق کار برایت جالب‌تر یا آسان‌تر بود؟ چرا؟

✍

✍