

ریاضی صنف دوازدهم فصل اول

درس دوم

هدف کلی درس

هدف این درس آن است که شاگردان درک دقیق‌تری از رفتار یک تابع در نزدیکی یک نقطه به دست آورند و با مفاهیم «حد از سمت راست»، «حد از سمت چپ»، «ویژگی‌های حد «و» حد توابع کسری «آشنایی پیدا کنند، تا بتوانند به گونه‌ای منطقی و تحلیلی، رفتار توابع را بررسی کنند.

۱. مفاهیم اساسی درس

۱.۱ حد از سمت راست و سمت چپ

تعریف:

فرض کنید تابعی به نام $f(x)$ داریم. می‌خواهیم بدانیم زمانی که x به یک عدد مشخص مثل a نزدیک می‌شود، رفتار تابع چگونه است.

- حد از سمت راست: زمانی که x از بزرگ‌تر از a به طرف a نزدیک می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

- حد از سمت چپ: زمانی که x از کوچک‌تر از a به طرف a نزدیک می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

نکته مهم: اگر هر دو حد از سمت راست و چپ با هم مساوی باشند، آنگاه می‌گوییم که **حد اصلی** (در آن نقطه موجود است):

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{اگر تنها و اگر} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

نمونه تصویری: در گراف بعضی توابع مانند تابع پله‌ای یا قدرمطلق، ممکن است رفتار تابع در دو سمت نقطه مورد نظر متفاوت باشد. در این گونه حالت‌ها، ممکن است دو حد موجود باشد، اما مساوی نباشد، بنابراین حد کلی وجود ندارد.

تمرین: گراف تابع زیر را رسم کنید و بررسی نمایید که حد از دو سمت در نقطه $x = 2$ برابر است یا نه:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x < 2 \\ x^2 & x \geq 2 \end{cases}$$

۲.۱ ویژگی‌های حد

حدها شبیه عملیات ریاضی، دارای قواعدی هستند:

1. جمع و تفریق:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

2. ضرب:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

3. تقسیم: مشروط به اینکه مخرج صفر نشود)

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad \text{به شرطی که } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

4. ضرب در عدد ثابت:

$$\lim_{x \rightarrow a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

تمرین: اگر داشته باشیم $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3$ حساب کنید:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + g(x)] \quad \bullet \\ & \lim_{x \rightarrow 1} [f(x) \cdot g(x)] \quad \bullet \\ & \lim_{x \rightarrow 1} [5 \cdot f(x)] \quad \bullet \end{aligned}$$

۳.۱ حد توابع کسری (نسبی)

توابع کسری این گونه‌اند:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ای هستند.

مسائل معمول: زمانی که صورت و مخرج همزمان به صفر میل کنند، حالت مبهم $\frac{0}{0}$ ایجاد می‌شود و باید ساده‌سازی کنیم.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

با فکتورگیری:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2$$

پس:

$$\lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 4$$

۲. معمای مفهومی

معمای قطار و پل متحرک:

تصور کنید قطاری در حال حرکت به سوی پلی است که آرام آرام در حال بلند شدن می باشد. هر بار که قطار به یک نقطه نزدیک می شود، آن قسمت از پل بالا رفته و دیگر در جای قبلی اش نیست.

چه ارتباطی با مفهوم حد دارد؟

- موقعیت قطار هر لحظه به یک مکان خاص نزدیک تر می شود.
- ولی آن مکان دیگر به صورت واقعی وجود ندارد، چون پل در حال حرکت است.
- مشابه حد در ریاضی: مقدار تابع به چیزی نزدیک می شود که شاید در خود آن نقطه وجود نداشته باشد.

۳. چالش مهارتی (شایستگی)

حد تابع کسری:

اگر تابع زیر را داشته باشیم:

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

بررسی نمایید:

- $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

راه حل:

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3 \quad (x \neq 3)$$

پس:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 6 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$$

۴. روش‌های بهترسازی یادگیری

فعالیت گروهی:

- شاگردان به گروپ‌هایی تقسیم شوند تا گراف توابع خاص را تحلیل کرده و حد از سمت راست و چپ را بررسی نمایند.
- استفاده از کاغذهای رنگی برای نشانه‌گذاری نقاطی که تابع در آن‌ها تعریف نشده اما حد موجود است.

استفاده از ابزار تصویری:

- کار با برنامه‌هایی مثل **GeoGebra** برای دیدن رفتار دقیق توابع.
- مقایسه نمودارهایی که در آن تابع در نقطه‌ای تعریف نشده ولی حد وجود دارد.

۵. یادگیری خلاقانه

پروژه کوتاه:

هر گروپ یک تابع را انتخاب کند و:

- حد از دو سمت را تحلیل کند.
- گراف تابع را رسم کند.
- بررسی کند که آیا حد کلی موجود است یا نه.

تهیه مستند:

شاگردان یک ویدیو یا پوستر تهیه کنند و در آن با زبان ساده و تصویری، مفهوم حد را توضیح دهند.

۶. خلاصه درس

در پایان این درس، شاگردان:

- با مفهوم حد از دو سمت آشنا می‌شوند.
- ویژگی‌های جبری حد را تمرین می‌کنند.
- توانایی تحلیل و ساده‌سازی توابع نسبی را می‌آموزند.
- از طریق مثال‌ها و فعالیت‌های عملی، درک عمیق‌تری از نزدیکی و تقریب در ریاضی پیدا می‌کنند.