

■ ریاضی صنف یازدهم فصل اول

✱ درس دوم- بیضوی و پارابول

در این درس، شما با مفاهیم بیضوی و پارابول آشنا خواهید شد. این مفاهیم به شما کمک می‌کنند تا پایه‌های ریاضی خود را تقویت کنید و روش‌های مختلفی را برای بررسی مقاطع مخروطی بیاموزید.

✱ هدف کلی درس:

درک عمیق، کاربردی و خلاقانه از مقاطع مخروطی (پارابولا، بیضوی) مطابق محتوای کتاب ریاضی صنف یازدهم، به گونه‌ای که شاگرد با استفاده از مثال‌های واقعی، اشیاء قابل لمس و روش‌های ابتکاری، بتواند این مفاهیم را نه تنها در حل تمرینات درسی بلکه در زندگی روزمره و رشته‌های فنی نیز به کار ببرد.

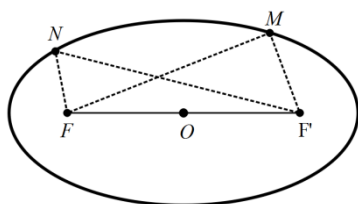
این هدف در چند بخش قابل تفکیک است:

۱. آشنایی دقیق با تعریف‌های ریاضیاتی و معادلات مقاطع مخروطی.
۲. تشخیص و تحلیل شکل هر مقطع بر اساس معادله‌ی آن.
۳. استفاده از اشیای واقعی برای مدل‌سازی مفاهیم.
۴. تقویت تفکر هندسی و توانایی حل مسأله در حالات گوناگون.
۵. آماده‌سازی شاگرد برای کاربرد این مفاهیم در موضوعات پیشرفته‌تر (مانند فزیک، انجینیری و اقتصاد).

● بخش اول: بیضوی (Elliptic Equation)

✓ تعریف بیضوی:

بیضوی مجموعه نقاطی است که مجموع فاصله‌هایشان از دو نقطه ثابت (محراق‌ها) مقدار ثابتی $2a$ دارد.



$$NF + NF' = MF + MF' = 2a$$

✓ معادله بیضوی:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

اگر مرکز در مبدأ باشد:

- اگر $a > b$ ، محور اصلی افقی است.
- اگر $b > a$ ، محور اصلی عمودی است.

معادله استاندارد بیضوی که مرکز آن در نقطه اختیاری باشد:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

✦ مثال کاربردی:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \text{معادله‌ی:}$$

$$\begin{aligned} a^2 &= 9, & a &= 3, & 2a &= 6 \\ b^2 &= 4, & b &= 2, & 2b &= 4 \end{aligned}$$

مرکز در مبدأ، محور اصلی افقی با طول ۶ واحد، محور فرعی ۴ واحد.

📦 تمرین با اشیاء واقعی:

سطح میز ناهارخوری بیضوی شکل را اندازه بگیرید. مجموع فاصله‌های هر نقطه از سطح میز تا دو شمع که در دو انتها قرار دارند، همیشه برابر است.

معادله عمومی بیضوی:

در صورت که معادله استاندارد بیضوی را انکشاف دهیم معادله عمومی بیضوی بدست می آید که به شکل زیر است.

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

در معادله عمومی بیضوی x^2 و y^2 دارای ضرایب مختلف و هم علامه است.

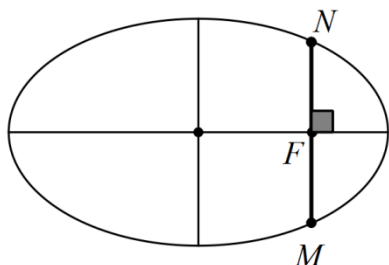
مثال: معادله عمومی بیضوی به شکل $6x^2 + 5y^2 + 12x + 20y = 4$ داده شده است آن را به استاندارد تبدیل کنید.

$$6x^2 - 12x + 5y^2 + 20y = 4 \Rightarrow 6(x^2 - 2x + 1 - 1) + 5(y^2 + 4y + 4 - 4) = 4$$

$$\Rightarrow 6(x-1)^2 - 6 + 5(y+2)^2 - 20 = 4 \Rightarrow 6(x-1)^2 + 5(y+2)^2 = 30 \Big/ \left(\frac{1}{30}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{5} + \frac{(y+2)^2}{6} = 1$$

وتر عمودی بیضوی: وتر خطی است که دو نقطه محیط بیضوی را به هم وصل می نماید، اگر یک وتر از محراق بگذرد و بالای قطر بزرگ عمود باشد بنام وتر عمودی یاد می شود.

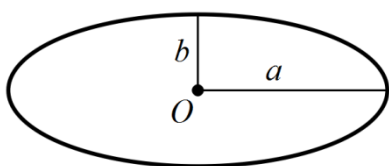


در شکل مقابل خط MN وتر عمودی است، طول وتر عمود را می توانیم

از رابطه ذیل در یابیم.

$$MN = \frac{2b^2}{a}$$

مساحت بیضوی: مساحت یک بیضوی اگر قطر های آن $2a$ $2b$ باشد برابر به πab است.



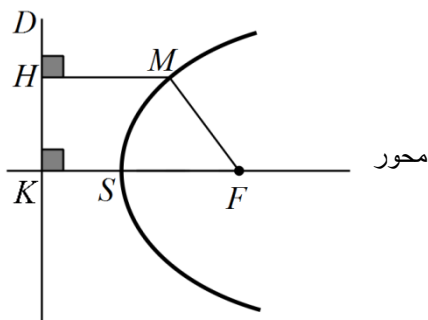
$$S = \pi ab$$

بخش دوم: پارابولا

✔ **تعریف پارابولا:**

پارابولا مجموعه نقاطی در صفحه است که از یک نقطه ثابت به نام **محراق (Focus)** و یک خط ثابت به نام **خط هادی (Directrix)** فاصله ی مساوی دارند.

نقطه ثابت محراق است و به حرف نشان می دهد و خط مستقیم را خط هادی یا خط موج پارابول یاد می نماید و آن را به نشان می دهد.



$$MF = MH$$

$$SF = SK = p$$

✔ **معادله ی پارابولا:**

- اگر رأس در مبدأ باشد و محور تناظر محور x باشد: $y^2 = 4px$
- اگر محور تناظر محور y باشد: $x^2 = 4py$

✓ رأس (Vertex) و محور تناظر:

- رأس همان نقطه مرکزی منحنی است.
- محور تناظر خطی است که منحنی را از وسط تقسیم می کند و از محراق و رأس می گذرد.

✓ وترهای پارابولا:

هر خطی که دو نقطه از پارابولا را به هم وصل کند، یک وتر است. وتری که از محراق بگذرد به نام **وتر اصلی** یاد می شود.

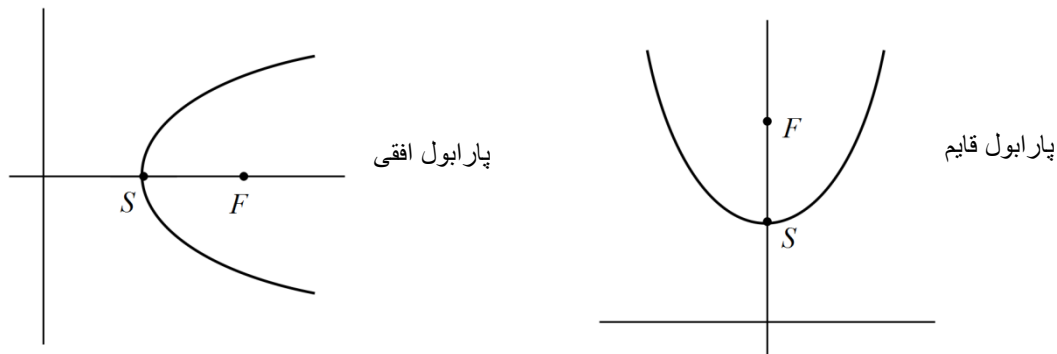
★ مثال مفهومی:

اگر معادله ی پارابولا چنین باشد: $y^2 = 8x$

- مقدار $y^2 = 8x$
- فاصله محراق از رأس ۲ واحد است.

پارابول افقی و قائم:

اگر محور تناظر پارابول افقی باشد پارابول افقی است که دهانه به طرف چپ یا راست است، و اگر محور تناظر پارابول قائم باشد پارابول قائم است که دهانه آن به طرف بالا یا پایین است.



(a) اگر $P > 0$ باشد دهانه پارابول قائم به طرف بالا و پارابول افقی به طرف راست است.

(b) اگر $P < 0$ باشد دهانه پارابول قائم به طرف پایین و پارابول افقی به طرف چپ است.

معادله معیاری پارابول که رأس آن در نقطه $S(h, k)$ باشد:

اگر رأس پارابول در $S(h, k)$ با استفاده از انتقال محور ها معادله معیاری پارابول طور ذیل است.

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

معادله معیاری پارابول افقی

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

معادله معیاری پارابول قائم

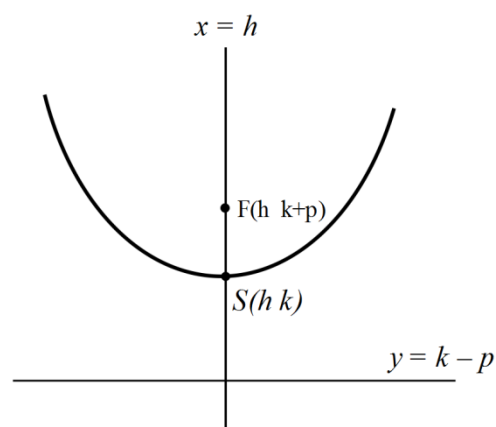
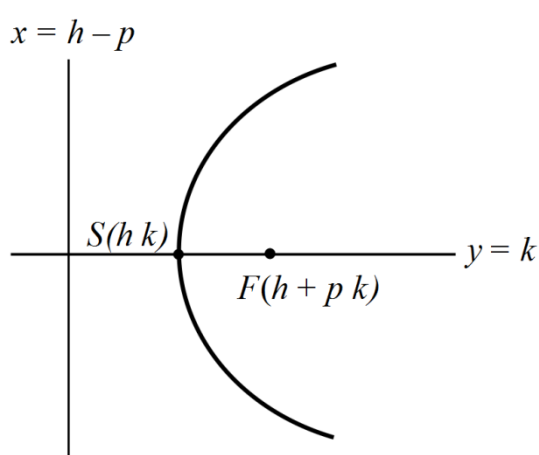
معادله عمومی پارابول:

اگر معادله معیاری پارابول را انکشاف دهیم معادله عمومی آن بدست می آید که معادله عمومی پارابول افقی به شکل $Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$ و معادله عمومی پارابول قائم به شکل $Ay^2 + By + Cx + D = 0$ است.

و برای تبدیل معادله عمومی به استاندارد از روش تکمیل مربع استفاده می نماییم.

تعیین مختصات رأس، محراق و خط موجه در پارابول:

مطابق شکل های مقابل در پارابول افقی محراق به اندازه p واحد پیش تر از رأس و خط هادی به اندازه p واحد عقب تر از رأس قرار دارد و در پارابول قائم محراق p واحد بالا تر از رأس و خط هادی p واحد پایین تر از رأس قرار دارد پس با معلوم بون معادله استاندارد مختصات رأس و محراق پارابول را در یافت نمود.



مثال: از معادله $(x-1)^2 = 12(y-2)$ مختصات رأس، محراق، معادله خط موجه، مختصات انجام های وتر عمودی را در یافت نموده و پارابول را ترسیم نمایید.

حل: اگر $(x-1)^2 = 12(y-2)$ معادله استاندارد پارابول باشد پس:

$$k = 2, h = 1 \Rightarrow S(1, 2)$$

$$4p = 12 \Rightarrow p = 3$$

در معادله توان مربع است پس پارابول قائم و دهنه آن بطرف بالا است:

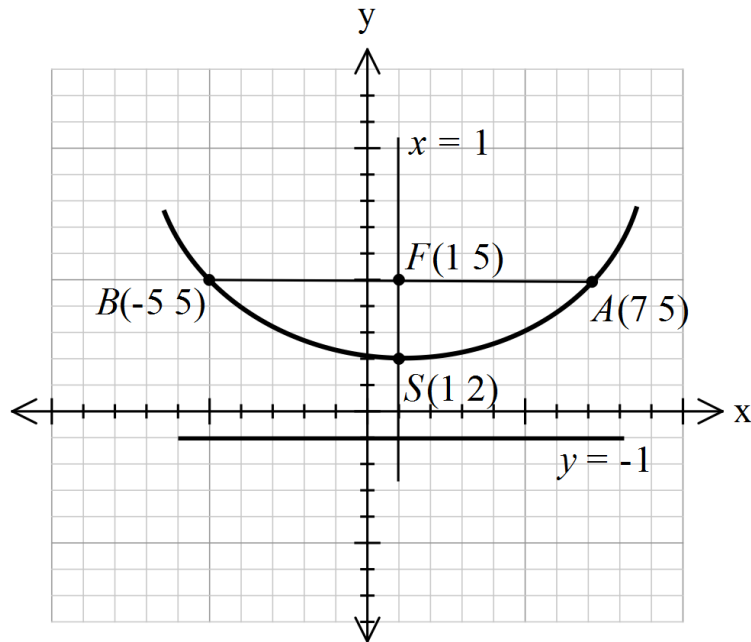
$$F(h, k + p) \Rightarrow F(1, 2 + 3) = F(1, 5) \quad \text{مختصا محراق:}$$

$$y = k - p \Rightarrow y = 2 - 3 \Rightarrow y = -1 \quad \text{معادله خط موجه:}$$

برای دریافت مختصات انجام های وتر عمودی قیمت y محراق ($y = 5$) را در معادله پارابول وضع می نماییم:

$$y = 5$$

$$(x-1)^2 = 12(5-2) \Rightarrow (x-1)^2 = 36 \Rightarrow (x-1) = \pm 6 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (7, 5) \\ (-5, 5) \end{cases}$$



تمرین با اشیاء واقعی:

یک چراغ مطالعه را در نظر بگیرید. بازتاب نور در آینه سهمی شکل (پارابولیک) نشان می‌دهد که تمامی نورهای بازتاب‌شده به سمت محراق می‌روند.

روش‌های ابتکاری برای یادگیری

۱. نقشه‌سازی تصویری: مقاطع مخروطی را با استفاده از مخروط‌های بریده‌شده از کاغذ رسم کنید.
۲. بازی با نور و بازتاب: از چراغ‌قوه، آینه سهمی، یا سطح صاف استفاده کنید تا مسیر نور را بررسی کنید.
۳. مسابقه بین شاگردان: هر دانش‌آموز یک معادله را دریافت کرده و باید نوع مقطع را در سریع‌ترین زمان تشخیص دهد.
۴. مدل‌سازی با سیم یا پلاستیک خم‌شدنی: بیضوی و هایپربول را با کش‌ها یا سیم‌های نرم بسازید.

خلاصه آنچه باید بیاموزید:

ویژگی‌های کلیدی	معادله عمومی	تعریف	موضوع
رأس، محراق، محور تقارن	$y^2 = 4px$	فاصله برابر از نقطه و خط	پارابولا
مرکز، دو محراق، دو محور	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	مجموع فاصله‌ها ثابت	بیضوی

ورق کار: مقاطع مخروطی – صنف یازدهم

معلومات عمومی:

نام شاگرد: _____:

صنف: یازدهم

تاریخ: _____:

نام استاد: _____:

هدف ورق کار:

تقویت فهم مفاهیم پارابولا و بیضوی، شناخت ویژگی‌های آن‌ها، و تشخیص اشکال هندسی از روی معادله یا تصویر، همراه با فعالیت‌های عملی.

بخش ۱: تشخیص نوع مقطع از معادله

در جدول زیر معادلات را بخوان و نوع مقطع را مشخص کن. همچنان مقادیر مربوط به a, b یا $4p$ را پیدا کن و ویژگی‌های اصلی را بنویس.

ویژگی‌ها (محور، محراق، رأس یا مرکز)	مقدار مهم (a, b یا $4p$)	نوع مقطع	معادله
			$y^2 = 12x$
			$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$

بخش ۲: تمرین مفهومی با اشیاء واقعی

🎨 فعالیت ۱: ساخت مدل بیضوی

مواد لازم: دو میخ، ریسمان، کاغذ، مداد

✓ دستور کار:

۱. دو میخ را در فاصله ۸ سانتی متر روی مقوا نصب کن.
۲. ریسمانی به طول ۱۲ سانتی متر را بین شان گره بزن.
۳. مداد را داخل ریسمان بگذار و بچرخان.

📌 سؤال:

- چرا شکلی که رسم می کنی بیضوی است؟
 - دو میخ چه نقشی دارند؟ _____
-

🎨 فعالیت ۲: بازتاب نور در پارابولا

اگر آینه سهمی شکل یا قاب ماهواره ای داری، نور چراغ قوه را به آن بتابان و محل بازتاب را مشخص کن.

📌 سؤال:

- نورهای موازی پس از بازتاب به کجا می روند؟
 - آن نقطه چه نام دارد؟ _____
-

□ بخش ۳: ترسیم نمودار

📌 برای هر معادله، نمودار را در دستگاه مختصات رسم کن.

۱. $y^2 = 8x$

۲. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

(از خط کش و مداد رنگی استفاده کن. رأس، کانون، محورها را مشخص کن)

بخش ۴: خودارزیابی

✓ هر جمله را بخوان و اگر درست است، تیک بزن:

- ☐ من می‌توانم نوع مقطع را از روی معادله تشخیص دهم.
- ☐ من تفاوت بین پارابولا، بیضوی و هایپربول را درک کرده‌ام.
- ☐ من توانستم با ابزار ساده شکل بیضوی یا پارابولا را بسازم.
- ☐ من می‌دانم که در فزیک یا مهندسی از این اشکال چگونه استفاده می‌شود.

📌 یادداشت مفاهیم (اختیاری):
